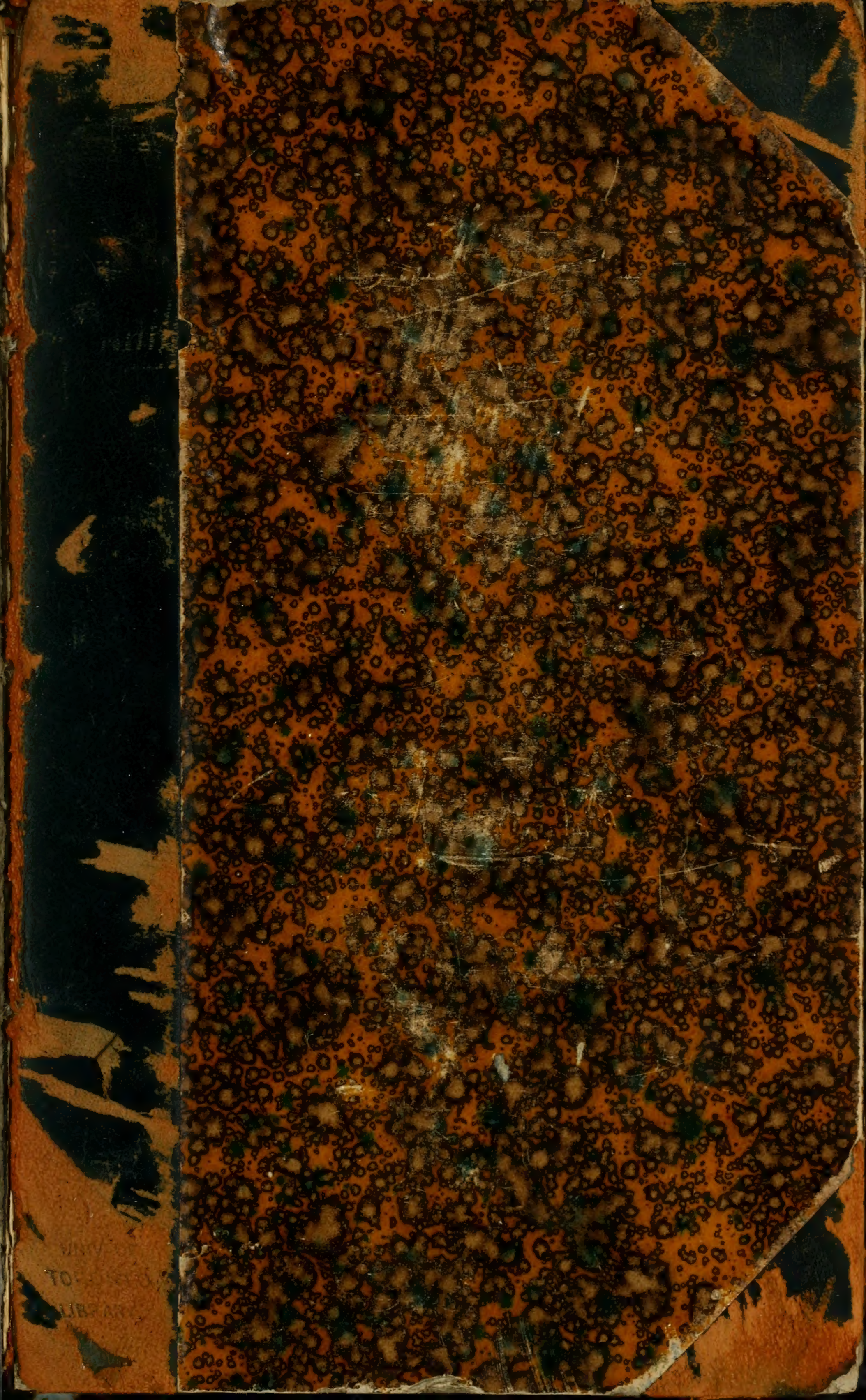


NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME SÉRIE.

1897


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. C.-A. LAISANT,

DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR A SAINTE-BARBE,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. X. ANTOMARI,

DOCTEUR ÈS SCIENCES, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CARNOT.

Publication fondée en 1842 par Gerono et Terquem,
et continuée par Gerono, Prouhet, Bourget, et MM. Brisse et Rouché.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME SEIZIÈME.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1897

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[O7b]

ÉTUDE GÉNÉRALE DES LENTILLES ÉPAISSES AU MOYEN DE L'HOMOGRAPHIE;

PAR M. ANDRÉ VICAIRE (1).

La plupart des propriétés et des formules qu'on rencontre dans la théorie élémentaire des lentilles se déduisent immédiatement et avec une grande généralité de ce seul fait : un point lumineux a pour image, dans un dioptre, un seul point situé sur le même diamètre que lui; et deux points distincts ont pour images des points distincts.

J'établis directement cette proposition, comme dans tous les cours, en supposant, bien entendu, l'ouverture du dioptre très faible. D'après cela, si l'on considère un système de dioptres ayant leurs centres sur un même axe, un point lumineux P situé sur l'axe aura pour limite un point P' situé sur le même axe et lui correspondant homographiquement.

Soient A, A' deux points de l'axe; posons

$$AP = x, \qquad A'P' = x'.$$

(1) Admis le premier à l'École Polytechnique en 1896.

x et x' sont liés par une relation d'homographie

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0;$$

faisant x' infini, on en tire

$$x = -\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Le point F correspondant à cette valeur de x est appelé *foyer*. C'est le point lumineux dont l'image est à l'infini.

De même, pour x infini,

$$x' = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Le point F' correspondant est le second foyer : c'est l'image du point situé à l'infini.

D'après le principe du retour inverse, si les rayons se propageaient en sens contraire, F serait l'image du point à l'infini et F' aurait ce point pour image.

La formule générale prend une forme plus simple, si l'on choisit des origines particulières. Prenons pour A et A' un point et son image. Dans ce cas,

$$\delta = 0.$$

La formule a la forme bien connue

$$\alpha + \frac{\beta}{x'} + \frac{\gamma}{x} = 0.$$

Prenons pour origines les foyers $\beta = 0$, $\gamma = 0$; la formule devient

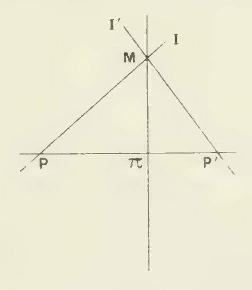
$$\alpha x x' + \delta = 0,$$

forme de Newton.

J'établis ensuite l'existence des plans principaux.

Soit PI un rayon lumineux issu du point P de l'axe. Après réfraction dans les différents dioptres du système, il sort suivant P'I'. Les deux rayons se coupent en M.

PI, P′I′ se correspondent homographiquement. Donc quand PI tourne autour de P, en restant dans le plan de la figure, le lieu de M est une conique. Cette conique se décompose, car, lorsque PI se confond avec l'axe, P′I′ se confond avec lui. L'axe fait donc partie du lieu. Le reste du lieu est une droite qui, par symétrie, est perpendiculaire à l'axe. Dans l'espace, c'est un plan perpendiculaire à l'axe. Ce plan est le plan principal relatif au point P. On réserve d'ordinaire cette dénomi-



nation aux plans relatifs au foyer F et au point à l'infini.

A un point lumineux correspond un seul plan principal. Pour la réciproque, deux cas seulement se présentent : tous les points lumineux ont même plan principal (lentilles minces); ou ils ont des plans principaux distincts (lentilles épaisses).

Supposons, en effet, que deux points P et φ aient même plan principal. Soit M un point de ce plan. Les rayons PM, φM ressortent suivant MP′, Mφ'. Donc, M est à lui-même son image. Soit R un troisième point quelconque pris sur l'axe. Le rayon RM sortira suivant MR′; M est donc un point du plan principal de R : et ce plan se confond avec celui de P et de φ.

1° *Cas des lentilles minces.* — Le point où le plan

principal unique rencontre l'axe est un point double de l'homographie des points et de leurs images, puisque, d'après ce qu'on a vu plus haut, il est à lui-même son image. Soit C l'autre point double; c'est un centre optique. En effet, soient CM un rayon incident, M le point où il rencontre le plan principal. En sortant, il doit passer par C et par M; donc, il passe sans déviation.

2° *Cas des lentilles épaisses.* — Soit π le point où le plan principal de P rencontre l'axe. P et π se correspondent homographiquement. Quand π s'en va à l'infini, P vient en un point N qu'on appelle *point nodal.*

Tous les rayons passant par N ressortent parallèlement à leur direction primitive, en passant par l'image N' de N. N' est le second point nodal. Il joue le rôle de N quand la lumière se propage en sens inverse.

Les deux points doubles de l'homographie considérée en dernier lieu sont les points de Bravais. Il est clair qu'ils sont à eux-mêmes leurs images.

On déduit aisément de ce qui précède les constructions usuelles.

[E5]

SUR UNE QUESTION DE LICENCE [1];

PAR M. V. JAMET.

Étude de l'intégrale

$$\int \frac{e^{2aiz} - e^{2biz}}{z^2}\,dz$$

(1) Énoncé dans le numéro de mars 1896, p. 137.

prise le long du contour formé de deux demi-circonférences de rayons R et r, ayant l'origine pour centre commun et reliées par les portions de l'axe réel qu'elles interceptent entre elles.

On supposera a et b réels et positifs.

En faisant tendre R vers l'infini et r vers zéro, on déduira la valeur de l'intégrale définie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x - \sin \beta x}{x^2}\, dx$$

(α *et* β *réels*). (Rennes, session de novembre 1895.)

1. Évidemment, on doit supposer les deux demi-circonférences tracées de part et d'autre de l'axe réel; sans quoi le contour d'intégration ne renfermerait aucun point critique de la fonction sous le signe $\int$, et l'intégrale proposée serait constamment nulle.

2. Dans le cas contraire, l'intégrale aura la même valeur que si elle était calculée tout le long d'un cercle ayant pour centre l'origine. Mais alors on voit qu'elle est égale à la valeur que prend, pour $\alpha = 0$, la dérivée, par rapport à α, de l'intégrale

$$\int \frac{e^{2aiz} - e^{2biz}}{z - \alpha}\, dz,$$

calculée tout le long d'un cercle ayant α pour centre. Or cette dernière fonction est égale à

$$2\pi\sqrt{-1}\,(e^{2ai\alpha} - e^{2bi\alpha});$$

sa dérivée, par rapport à α, est

$$4\pi(ae^{2ai\alpha} - be^{2bi\alpha})$$

Pour $\alpha = 0$, elle devient

$$4\pi(b - a).$$

Telle est donc la valeur de l'intégrale proposée.

3. Considérons maintenant le cas où la demi-circonférence de rayon R est tracée du côté des y positifs ; je dis que si R croît au delà de toute limite, la partie de l'intégrale proposée qui se rapporte à cette circonférence tend vers zéro. En effet, si l'on pose

$$z = x + yi = \mathrm{R}(\cos\theta + i\sin\theta),$$

l'intégrale

$$(\mathrm{A}) \qquad \int \frac{e^{2aiz}}{z^2}\,dz,$$

calculée tout le long de cette demi-circonférence, est égale à

$$\frac{i}{\mathrm{R}}\int_0^{\pi} e^{2ai(x+yi)-\theta i}\,d\theta.$$

(On suppose la demi-circonférence parcourue dans le sens positif.)

La somme des modules de ses éléments est

$$(\mathrm{B}) \qquad \frac{1}{\mathrm{R}}\int_0^{\pi} e^{-2ay}\,d\theta.$$

et, comme a et y sont positifs, le facteur e^{-2ay} ne dépasse jamais l'unité. Donc l'expression (B) est inférieure à

$$\frac{\pi}{\mathrm{R}}$$

et $\frac{\pi}{\mathrm{R}}$ est, *a fortiori,* supérieure au module de l'intégrale (A). De même l'intégrale

$$\int \frac{e^{2biz}}{z^2}\,dz.$$

calculée tout le long de la même demi-circonférence, a un module inférieur à $\frac{\pi}{R}$, et enfin, l'intégrale

$$\int \frac{e^{2aiz} - e^{2biz}}{z^2}\,dz,$$

calculée tout le long du même contour, a un module inférieur à $\frac{2\pi}{R}$. C. Q. F. D.

4. Je suppose maintenant la demi-circonférence de rayon r parcourue dans le sens négatif et je me propose de calculer la limite vers laquelle tend l'intégrale proposée, calculée tout le long de cette demi-circonférence, quand r tend vers zéro. A cet effet, j'observe que la fonction sous le signe $\int$ est égale à

$$2i\,\frac{a-b}{z} + \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(2i)^{p+2}(a^{p+2}-b^{p+2})}{1.2.3\ldots p+2}\,z^p.$$

La série écrite sous le signe $\sum$ est uniformément convergente, quand le module de z varie de o à un nombre ρ, qu'on peut supposer supérieur à r. De plus, si dans le terme général on remplace z par $re^{\theta i}$, et qu'on intègre terme à terme, en faisant varier θ de π à 2π, on trouve une série convergente, car son terme général est

$$i\,\frac{(2i)^{p+2}(a^{p+2}-b^{p+2})}{1.2.3\ldots p+2}\,r^{p+1}\int_{\pi}^{2\pi} e^{(p+1)\theta i}\,d\theta,$$

et le module de ce terme est inférieur au terme général d'une série convergente, savoir

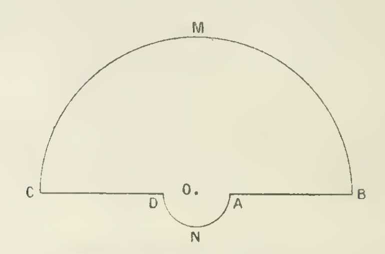
$$\pi\,\frac{2^{p+2}(a^{p+2}-b^{p+2})}{1.2.3\ldots p+2}\,r^{p+1}.$$

Donc la série écrite sous le signe $\sum$ donne lieu à une

intégrale égale à la somme d'une série convergente, s'annulant avec r. Seul, le terme en dehors du signe $\sum$ donne lieu à une intégrale différente de zéro, savoir

$$-2\int_{\pi}^{2\pi}(a-b)\,d\theta = 2\pi(b-a).$$

5. Il en résulte que l'intégrale proposée, calculée le long des deux segments CD, AB, qui relient entre elles



les deux demi-circonférences données, tend vers une limite égale à l'excès de l'intégrale totale $4\pi(b-a)$. Donc, en faisant varier x par des valeurs réelles, on trouvera

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2aix}-e^{2bix}}{x^2}\,dx = 2\pi(b-a)$$

et par conséquent

$$(c)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx = 2\pi(b-a),$$

$$(D)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2ax - \sin 2bx}{x^2}\,dx = 0.$$

Or la formule (c) se transforme comme il suit

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\overline{b-a})x\,\sin(\overline{b+a})x}{x^2}\,dx = \pi(b-a).$$

Si l'on suppose $b > a$, on pourra conclure que α et β

étant positifs l'un et l'autre, *mais α étant* $< \beta$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} = \pi\alpha.$$

Si b est inférieur à a, on pourra conclure encore que, si α est négatif et β positif

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2}\,dx = \pi\alpha.$$

Si α et β sont négatifs, on posera $\alpha = -\alpha'$, $\beta = -\beta'$, et l'on trouvera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha' x \sin \beta' x}{x^2}\,dx = \pi\alpha' = -\pi\alpha,$$

α' étant supposé $< \beta'$.

6. La formule (D) donne lieu à des considérations du même ordre. Elle se transforme comme il suit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a+b)x \cos(a-b)x}{x^2}\,dx = 0.$$

D'ailleurs, dans l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x^2}\,dx,$$

on peut toujours regarder β comme positif, et l'on en conclut que cette intégrale est nulle pour tout système de valeurs réelles de α et de β.

[K2e] [K16b]

QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. G. GALLUCCI,

Élève de l'Université de Naples.

---

1. *Si* G *est le centre des moyennes distances des n points* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *d'un cercle* O *(ou d'une sphère* O*)*,

pour chaque point M *de la droite (ou du plan) qui passe par* O *perpendiculairement à* GA_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *on a*

$$(1) \qquad \overline{MA}_i^2 = \tfrac{1}{2}(\overline{MA}_1^2 + \overline{MA}_2^2 + \ldots + \overline{MA}_n^2).$$

Si $x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n$ sont les coordonnées des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ rapportés à un système d'axes rectangulaires, pour tous les points $M(x, y)$ qui vérifient la relation (1), on a

$$n[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] \\ = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + \ldots + (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2,$$

et, après les réductions

$$2x(nx_i - x_1 - \ldots - x_n) + 2y(ny_i - y_1 - y_1 - \ldots - y_n) \\ - (nx_i^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 + ny_i^2 - y_1^2 - \ldots - y_n^2) = 0.$$

Le lieu du point M est donc une droite. Cette droite passe évidemment par O et elle est perpendiculaire à la droite GA_i qui joint les deux points $A_i(x_i, y_i)$ et

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}\right).$$

Par un calcul analogue on démontre le théorème dans l'espace.

Corollaire. — *Le cercle décrit sur* OG *comme diamètre coupe chaque droite* GA_i *en un point* P_i *dont le carré de la distance à* A_i *est moyenne arithmétique entre les carrés des distances aux autres* $n - 1$ *points.*

On peut aussi déduire ce corollaire d'un théorème très connu sur le cercle OG, qui est le lieu des points P dont la puissance, par rapport au cercle O, est

$$\frac{1}{n}(\overline{PA}_1^2 + \overline{PA}_2^2 + \ldots + \overline{PA}_n^2). \qquad \text{(Laisant.)}$$

2. *En particulier, si, dans un tétraèdre* ABCD, *on*

conduit par le centre O *de la sphère circonscrite le plan perpendiculaire à la médiane* AG *correspondant à la face* BCD, *pour chaque point* M *de ce plan, on a*

$$\overline{AM}^2 = \tfrac{1}{3}(\overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 + \overline{DM}^2).$$

On peut démontrer directement ce théorème en faisant usage du lemme suivant : *Si* G' *est le centre de gravité de la face* BCD *d'un tétraèdre* ABCD *on a*

$$(2)\quad \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 = 3\overline{AG}^2 + \tfrac{1}{3}(\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2).$$

Il suffit d'appliquer cette formule aux tétraèdres OBCD, MBCD.

Pour le triangle plan, on a le théorème analogue qui se démontre très facilement.

3. De la formule (2) on peut aussi déduire aisément les deux théorèmes suivants :

1° *Les tétraèdres qui ont un sommet fixe, le même barycentre et la somme des carrés des arêtes qui aboutissent au sommet fixe constante, ont les centres des sphères circonscrites sur un plan fixe.*

2° *Les tétraèdres qui ont un sommet fixe* A *et les autres sommets* BCD *sur une sphère* O, *de manière que* $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 =$ const., *ont leurs barycentres sur un plan fixe.*

Pour le triangle plan, on a

1° *Les triangles qui ont même barycentre, un sommet fixe et la somme des carrés des côtés qui y concourent constante ont les centres des cercles circonscrits sur une droite fixe.*

2° *Les triangles qui ont un sommet fixe* A *et les autres sommets* BC *sur un cercle* O, *de manière que*

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ *soit constant, ont leurs barycentres sur une droite fixe.*

Ce dernier théorème est la généralisation d'un théorème de Jamet (Question 137 du *Mathesis*).

4. Les théorèmes donnés précédemment pour le triangle plan peuvent s'étendre au triangle sphérique, avec les modifications convenables. Je me limite à donner les énoncés :

1° *Si dans un triangle sphérique* ABC *on conduit par le centre (sphérique)* O *du cercle circonscrit le grand cercle perpendiculaire à la médiane* $\widehat{AG}$ *correspondant au côté* $\widehat{BC}$, *pour chaque point* M *de ce grand cercle on a*

$$\cos MA = \tfrac{1}{2}(\cos MB + \cos MC).$$

2° *On considère tous les triangles sphériques* ABC *qui ont un sommet fixe et tels que*

$$\cos AB + \cos AC = \text{const} ;$$

si le milieu G *de* $\widehat{BC}$ *est fixe, le lieu du centre sphérique du cercle circonscrit est un grand cercle perpendiculaire* $\widehat{AG}$, *et si le centre sphérique du cercle circonscrit* O *est fixe, le lieu du milieu* M *de* $\widehat{BC}$ *est un grand cercle perpendiculaire* $\widehat{AO}$.

5. *Si dans un tétraèdre* ABCD *on conduit les plans* α_1, α_2, α_3, α_4 *perpendiculaires respectivement aux milieux des deux couples d'arêtes opposées* AB, CD; AC, DB, *les droites* $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_3\alpha_4$ *sont dans un plan perpendiculaire à la droite* MN *qui joint les milieux des deux autres arêtes.*

En effet, pour chaque point P de la droite $\alpha_1\alpha_2$, on a

$$\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2; \qquad \overline{PB}^2 = \overline{PD}^2$$

ou bien

$$\overline{PA}^2 + \overline{PD}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2,$$

et, par conséquent,

$$\overline{PM}^2 + \overline{AM}^2 = \overline{PN}^2 + \overline{BN}^2;$$

et de même pour chaque point de $\alpha_3\alpha_4$. Donc ces deux droites sont dans un plan qui est le plan antiradical (plan symétrique du plan radical par rapport au milieu de la centrale) des deux sphères décrites sur AD, BC comme diamètres. Ce plan passe par O, centre de la sphère circonscrite au tétraèdre, et si l'on observe que l'orthocentre H est le symétrique de O par rapport au milieu de MN (barycentre), on a le théorème suivant :

Dans tout tétraèdre, les plans radicaux des trois couples de sphères décrites sur les trois couples d'arêtes opposées comme diamètres se coupent en un point H *qui est l'orthocentre du tétraèdre.*

En appliquant ce théorème, on trouve que si un tétraèdre est tel qu'il existe un point d'égale puissance par rapport aux six sphères décrites sur les arêtes comme diamètres, le tétraèdre est orthologique et le point est son orthocentre. La réciproque est presque évidente.

6. Des considérations analogues à celles du numéro précédent conduisent, pour le quadrangle plan, au théorème suivant :

Si A′, B′, C′, D′ *sont les centres des cercles circonscrits aux triangles* BCD, CDA, DAB, ABC *d'un quadrangle* ABCD, *les côtés du triangle diagonal du quadrangle*

A'B'C'D' *sont perpendiculaires aux médianes du quadrangle* ABCD (*droites qui joignent les milieux de deux côtés opposés*).

On a le même théorème pour le quadrangle sphérique.

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE JUILLET 1896. — COMPOSITIONS.

Paris.

Analyse. — I. *On considère l'intégrale curviligne*

$$\int_C \frac{(ab'-ba')(x\,dy-y\,dx)}{(ax+by)^2+(a'x+b'y)^2},$$

prise dans le sens positif le long d'une courbe C, *entourant l'origine et où* a, b, a', b' *désignent des constantes réelles.*

Montrer que la valeur de cette intégrale ne dépend pas de la courbe C, *et trouver cette valeur.*

L'expression à intégrer est la différentielle totale de la fonction

$$\text{arc tang}\,\frac{a'x+b'y}{ax+by},$$

qui ne dépend visiblement que de la seule variable $y:x$. Si donc on pose $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, l'intégrale cherchée J aura pour valeur la variation qu'éprouve la fonction

$$\text{arc tang}\,u \qquad \left(u=\frac{a'\cos\theta+b'\sin\theta}{a\cos\theta+b\sin\theta}\right),$$

quand θ varie de zéro à 2π. Or, cette fonction est croissante si $ab' - ba' > 0$, décroissante si $ab' - ba' < 0$; et, étant donnée une valeur quelconque m, la fraction u acquiert cette valeur m pour deux angles θ compris entre zéro et 2π. Par suite, la variation de arc tang u est égale à 2π. Si donc $ab' - ba' > 0$, on a $J = 2\pi$; si $ab' - ba' < 0$, on a $J = -2\pi$.

II. *Une surface est rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires, et les coordonnées x, y, z d'un point variable de cette surface sont exprimées en fonction de deux paramètres u et v. On suppose, de plus, que l'on a identiquement*

$$(1)\qquad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

1° *On démontrera que les lignes de courbure de cette surface sont données par les équations*

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.}$$

2° *Dans le cas particulier où $x = u$, trouver les expressions générales des fonctions y et z de u et v, satisfaisant aux équations* (1) *et* (2).

L'équation (1) exprime que le réseau formé par les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ est orthogonal; l'équation (2) exprime que ce réseau est conjugué. Il est donc constitué par les lignes de courbure.

Quand $x = u$, l'intégration de l'équation (2) donne

d'abord

(3) $$\frac{dz}{dv} - V_1 \frac{dy}{dv} = 0.$$

Substituant dans (1), simplifiant et intégrant, on trouve

(4) $$y = V_1 z - V_2.$$

Portant y dans (3) et intégrant, on obtient

(5) $$z\sqrt{1+V_1^2} = U - \int \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}}\, dV_2.$$

Dans ces diverses formules, V_1 et V_2 sont des fonctions arbitraires de v, et U est une fonction arbitraire de u. Si l'on pose

$$V_1 = \operatorname{tang}\varphi, \qquad V_2 \cos\varphi' \cos\varphi = V',$$

on donne aisément aux expressions de z et y, tirées de (5) et (4), les formes suivantes

$$z = (U - V)\cos\varphi - \frac{dV}{d\varphi}\sin\varphi,$$

$$y = (U - V)\sin\varphi + \frac{dV}{d\varphi}\cos\varphi,$$

ce qui permet de prendre pour φ le paramètre v lui-même. On trouve ainsi les surfaces moulures. (*Voir* le Problème proposé à la Licence en juillet 1895, *Nouvelles Annales*, p. 29-30; 1896.)

III. (Élèves de l'École normale). — 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles des surfaces dont la normale reste tangente à une sphère donnée.*

2° *Démontrer que l'un des systèmes de lignes de courbure se compose de développantes de cercle.*

3° *Démontrer que les lignes de courbure du second système sont sphériques.*

La question est empruntée à Monge (*Application de l'Analyse à la Géométrie*, art. XXIII, *De la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à une même sphère*). Nous engageons vivement nos lecteurs à étudier le beau Chapitre où elle est résolue.

Mécanique. — I. *Étudier le mouvement d'un disque circulaire plan, homogène, infiniment mince, deux points diamétralement opposés de sa circonférence étant assujettis à décrire respectivement deux droites rectangulaires concourantes* Ox *et* Oz. *On admet qu'il n'y a pas d'autres forces extérieures que les réactions des droites* Ox *et* Oz, *qui sont supposées normales à ces droites.*

Si l'on appelle φ l'angle du plan du disque avec le plan zOx, θ l'angle de Oz avec le diamètre dont les extrémités décrivent Ox et Oz, R le rayon du disque, M sa masse, T la force vive, on trouve

$$T = \frac{MR^2}{8}[(5 - \cos^2\varphi)\theta'^2 + \varphi'^2],$$

en désignant par des accents les dérivées prises par rapport au temps.

Le travail des forces étant nul, on a d'abord l'intégrale

$$(5 - \cos^2\varphi)\theta'^2 + \varphi'^2 = \text{const.} = h \qquad (h > 0),$$

et, de plus, la dérivée de T par rapport à θ étant nulle, l'une des équations de Lagrange montre que $\frac{dT}{d\theta'}$ est constant ; d'où

$$(5 - \cos^2\varphi)\theta' = \text{const.} = A.$$

Des intégrales ainsi obtenues, on déduit

$$dt = \frac{\sqrt{5 + \cos^2\varphi}\, d\varphi}{\sqrt{5h - A^2 + h\cos^2\varphi}},$$

$$d\theta = \frac{A\, d\varphi}{\sqrt{5 + \cos^2\varphi}\sqrt{5h - A^2 + h\cos^2\varphi}}.$$

Si $5h - A^2 > 0$, φ varie toujours dans le même sens, ainsi que θ.

Si $5h - A^2 = 0$, φ tend vers $\pm\frac{\pi}{2}$ pour t infini ; θ prend toutes les valeurs possibles.

Si $5h - A^2 < 0$, le plan du disque oscille de part et d'autre du plan zOx; θ varie toujours dans le même sens.

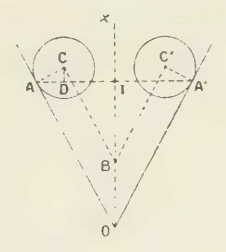
II. *On donne dans un plan deux droites* OA, OA′ *auxquelles sont respectivement tangents deux cercles égaux* C *et* C′. *Les cercles sont primitivement symétriques l'un de l'autre par rapport à la bissectrice* O*z* *de l'angle* AOA′. *On fait rouler les cercles* C *et* C′ *sur les droites* OA, OA′ *avec la même vitesse angulaire constante* ω.

Quelles sont les courbes liées invariablement aux cercles C *et* C′ *qui, dans le mouvement relatif de ces cercles, roulent l'une sur l'autre sans glisser?*

Il y a lieu de distinguer le cas où les cercles C *et* C′ *tournent avec des sens contraires de celui où ils tournent dans le même sens. Qu'arrive-t-il dans ce dernier cas? Comment peut-on alors définir le mouvement?*

1° Supposons d'abord les rotations de sens contraire; les deux cercles resteront symétriques par rapport à Oz. Le mouvement relatif de l'un par rapport à l'autre sera une rotation de vitesse angulaire 2ω, autour de I,

milieu de AA'. Soient R le rayon des deux cercles, 2α l'angle AOA', B le point de Oz situé à la distance R



des deux côtés de cet angle. On a

$$\begin{aligned} DI &= OA \sin\alpha - R\cos\alpha \\ &= (CB + R\,\omega t\alpha)\sin\alpha + R\cos\alpha - CB\sin\alpha. \end{aligned}$$

Mais si l'on compte le temps à partir de l'instant où C est en B, on aura

$$CB = R\omega t,$$

d'où

$$DI = R\sin\alpha.\omega t.$$

Cette relation définit une développante du cercle de rayon $R\sin\alpha = CD$. La base sur laquelle roule le lieu du point I est une courbe égale à celle-ci ; elles restent symétriques par rapport à Oz.

2° Si les rotations des deux cercles sont de même sens, elles équivalent pour le mouvement relatif à une translation perpendiculaire à AA' et de vitesse constamment croissante $\omega.AA'$.

III. (Élèves de l'École normale). *Un cylindre de révolution homogène, pesant, de masse m est couché sur un plan horizontal $\xi O\eta$, sur lequel il peut glisser sans frottement; suivant l'axe de ce cylindre est percé un canal de section infiniment petite, dans lequel se trouve un point pesant de même masse m, pouvant*

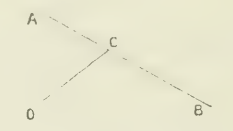
glisser sans frottement le long du canal. Étudier le mouvement du système en supposant le cylindre lancé sur le plan.

IV. (Élèves de l'École normale). *Soient* M *un point d'une figure plane invariable,* M' *le centre de courbure de sa trajectoire,* I *le centre instantané de rotation. Rappeler la démonstration de ce Théorème classique :*

L'axe radical du cercle de centre M *et de rayon* MI *et du cercle décrit sur* MM' *comme diamètre passe par un point* K' *qui est fixe, c'est-à-dire indépendant du point* M *choisi ; de plus, ce point* K *est situé sur la normale commune aux deux roulettes fixe et mobile.*

Appliquer cette proposition au problème suivant :

Une tige AB *s'articule en un de ses points* C *à l'extrémité d'une manivelle* OC, *qui est libre de tourner autour de son autre extrémité* O. *On assujettit le*



point A *à décrire une courbe* α*; le point* B *en décrit une autre* β.

1° *Connaissant la normale à la courbe* α, *construire le centre instantané* I *de la tige* AB, *la normale à la courbe* β *et le point où la tige* AB *touche son enveloppe.*

2° *Connaissant le centre de courbure de la courbe* α, *construire la normale aux deux courbes roulettes ainsi que les centres de courbure de la courbe* β *et la courbe de la droite* AB.

Épreuves pratiques. — I. *On donne les trois angles*

d'un triangle sphérique

$$A = 116°20'2'',2; \qquad B = 75°0'51'',6; \qquad C = 70°6'59'',2.$$

On demande : 1° *de calculer les trois côtés ;* 2° *quelle variation entrainera sur le côté a une variation de* 1″ *sur l'angle* A.

II. (Élèves de l'École normale). *Par deux étoiles, dont les coordonnées équatoriales sont*

$$\mathcal{R} = 4^h 36^m 23^s,11; \qquad \mathcal{D} = +22°3'51'',6;$$
$$\mathcal{R}' = 2^h 33^m 36^s,81; \qquad \mathcal{D}' = -15°5'4'',2,$$

on fait passer un grand cercle.

Déterminer l'ascension droite des nœuds de ce cercle avec l'équateur, et l'inclinaison de son plan sur celui de l'équateur.

Lille.

Analyse. — I. *Désignant par z une variable complexe, étudier la fonction u définie par l'équation*

$$u^2 = 1 - z^2,$$

en précisant l'influence du chemin décrit par la variable sur la valeur de la fonction.

Indiquer ensuite quelles sont les diverses déterminations de l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{dz}{u},$$

lorsque le chemin d'intégration se déforme de toutes les manières possibles, en supposant seulement que pour la limite inférieure $z = 0$, *l'on ait* $u = +1$.

II. *On donne l'hélice définie, en coordonnées rectangulaires, par les équations*

$$(1) \qquad x = a e^{m\omega} \cos\omega, \qquad y = a e^{m\omega} \sin\omega, \qquad z = b e^{m\omega},$$

a, m, b étant trois constantes.

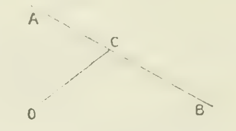
glisser sans frottement le long du canal. Étudier le mouvement du système en supposant le cylindre lancé sur le plan.

IV. (Élèves de l'École normale.) *Soient* M *un point d'une figure plane invariable,* M' *le centre de courbure de sa trajectoire,* I *le centre instantané de rotation. Rappeler la démonstration de ce Théorème classique :*

L'axe radical du cercle de centre M *et de rayon* MI *et du cercle décrit sur* MM' *comme diamètre passe par un point* K' *qui est fixe, c'est-à-dire indépendant du point* M *choisi ; de plus, ce point* K *est situé sur la normale commune aux deux roulettes fixe et mobile.*

Appliquer cette proposition au problème suivant :

Une tige AB *s'articule en un de ses points* C *à l'extrémité d'une manivelle* OC, *qui est libre de tourner autour de son autre extrémité* O. *On assujettit le*



point A *à décrire une courbe* α; *le point* B *en décrit une autre* β.

1° *Connaissant la normale à la courbe* α, *construire le centre instantané* I *de la tige* AB, *la normale à la courbe* β *et le point où la tige* AB *touche son enveloppe.*

2° *Connaissant le centre de courbure de la courbe* α, *construire la normale aux deux courbes roulettes ainsi que les centres de courbure de la courbe* β *et la courbe de la droite* AB.

Épreuves pratiques. — I. *On donne les trois angles*

d'un triangle sphérique

$$A = 116^\circ 20' 2'',2; \qquad B = 75^\circ 0' 51'',6; \qquad C = 70^\circ 6' 59'',2.$$

On demande : 1° *de calculer les trois côtés ;* 2° *quelle variation entraînera sur le côté a une variation de* 1'' *sur l'angle* A.

II. (Élèves de l'École normale). *Par deux étoiles, dont les coordonnées équatoriales sont*

$$\mathcal{A} = 4^h 36^m 23^s,11; \qquad \mathcal{D} = +22^\circ 3' 51'',6;$$
$$\mathcal{A}' = 2^h 33^m 36^s,81; \qquad \mathcal{D}' = +15^\circ 5' 4'',2,$$

on fait passer un grand cercle.

Déterminer l'ascension droite des nœuds de ce cercle avec l'équateur, et l'inclinaison de son plan sur celui de l'équateur.

Lille.

Analyse. — I. *Désignant par z une variable complexe, étudier la fonction u définie par l'équation*

$$u^2 = 1 - z^2,$$

en précisant l'influence du chemin décrit par la variable sur la valeur de la fonction.

Indiquer ensuite quelles sont les diverses déterminations de l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{dz}{u},$$

lorsque le chemin d'intégration se déforme de toutes les manières possibles, en supposant seulement que pour la limite inférieure z = 0, l'on ait u = + 1.

II. *On donne l'hélice définie, en coordonnées rectangulaires, par les équations*

$$(1) \qquad x = a e^{m\omega} \cos \omega, \qquad y = a e^{m\omega} \sin \omega, \qquad z = b e^{m\omega}$$

a, m, b étant trois constantes,

En conservant les notations habituelles, on trouve, pour les coordonnées des points P et Q, les valeurs suivantes :

Coordonnées de P	$x - pz$	$y - qz$	o
Coordonnées de Q	x	y	o

On aura donc

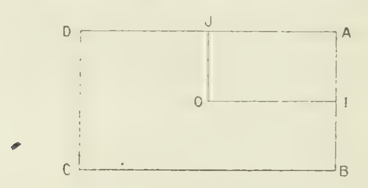
$$\text{aire POQ} = \tfrac{1}{2} z\,(qx - py),$$
$$\text{vol. MOPQ} = \tfrac{1}{6} z^2(qx - py).$$

On est donc ramené aux équations linéaires

$$(1)\qquad z\,(qx - py) = F(x^2 + y^2 + z^2),$$
$$(2)\qquad z^2(qx - py) = K(x^2 + y^2 + z^2)^p,$$

qui s'intègrent facilement. La deuxième conduit à une intégrale binôme.

Mécanique. — *Une plaque homogène pesante a la forme d'un rectangle* ABCD *dont les côtés sont* BC $= 2a$, AB $= 2b$ (*on suppose* $a > b$). *Le centre de*



gravité O *de la plaque se meut sans frottement sur une droite fixe* h. *Trouver le mouvement et la réaction au point* O.

Effectuer complètement les calculs avec les vitesses initiales suivantes :

Vitesse de O = zéro.

La vitesse du milieu I *de* AB *a pour composantes :*

Suivant OJ, $v_0 \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$; *suivant la normale à la plaque*, u_0.

La vitesse initiale du milieu J *de* AD *a pour composantes :*

Suivant OI, $-v_0 \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$; *suivant la normale*, $-\frac{v_0}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

Le mouvement du centre de gravité est le mouvement d'un point pesant sur une droite.

Le mouvement relatif autour du centre de gravité est un mouvement à la Poinsot.

Les données initiales sont choisies de telle sorte que l'intégration puisse se faire sans fonctions elliptiques.

Astronomie. — *Démonstration succincte des formules données par la* Connaissance des Temps *pour le Calcul des Occultations. Application à l'occultation de* η *du Taureau le 7 janvier 1895, au Puy-de-Dôme. Première approximation à trois décimales. S'il reste du temps, deuxième approximation ; calcul de l'heure locale de l'émersion, suivi des calculs à* 1° *près de l'angle au pôle* P *et de l'angle au zénith* Z.

Bordeaux.

Analyse. — I. *Déterminer une courbe telle que le rayon de courbure, en un point quelconque* M *de la courbe, soit dans un rapport constant avec la portion de normale comprise entre ce point et une droite donnée* O*y*.

Ramener la recherche à une quadrature et indiquer dans quel cas cette quadrature peut être effectuée en termes finis.

II. *Intégrer, à l'aide des développements en séries, l'équation différentielle*

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - yx^p = 0,$$

lorsque p est un nombre entier positif, égal ou supérieur à 3.

Quelles sont les particularités qui se présentent lorsque p est égal à 2, à 1, à 0.

Mécanique. — I. *Mouvement d'un point pesant, assujetti à glisser sans frottement sur le paraboloïde représenté en coordonnées rectangulaires (axe des z verticalement ascendant) par l'équation*

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 2z = 0$$

(A et B étant deux constantes quelconques).

On rapportera la surface à des coordonnées elliptiques, en la coupant par les paraboloïdes homofocaux, dont l'équation générale est

$$\frac{x^2}{A - \lambda} + \frac{y^2}{B - \lambda} - 2z + \lambda = 0.$$

II. *Un cylindre circulaire droit, dont le rayon de base est a et la hauteur h, est rempli d'eau et posé sur un plan horizontal. On fait tourner ce plan autour d'un diamètre de la base du cylindre et l'on suppose que le vase ne glisse pas.*

On demande : 1° de trouver le lieu géométrique du centre de gravité du liquide qui reste dans le vase lorsque le plan s'incline graduellement ; 2° de déterminer, en négligeant la masse du vase, l'angle minimum que doit faire le plan avec le plan horizontal, pour que le vase tombe.

Astronomie. — *Calculer, pour la latitude de Bordeaux* ($\varphi = 44°50'7'',2$), *les azimuts du coucher du Soleil les* 21 *juin,* 21 *juillet,* 21 *août,* 21 *septembre,* 21 *octobre,* 21 *novembre et* 21 *décembre* 1896.

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1896. PROBLÈME DE SPÉCIALES;

Solution par un « Correspondant » des Nouvelles Annales.

Étant donnés, en coordonnées rectangulaires, l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

et la sphère concentrique

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

on prend les plans polaires d'un même point M *par rapport à ces deux surfaces. Ces plans se coupent suivant une droite* Δ.

1° *On demande quel lieu* Σ *engendre la droite* Δ *quand le point* M *décrit une droite quelconque* D *de l'espace.*

2° *Quel lieu doit décrire le point* M *pour que la droite* Δ *passe par un point fixe* P? *Quel est le degré du cône décrit par la droite* Δ?

3° *On demande quelle relation géométrique doit exister entre deux points* M, M' *pour que les droites correspondantes* Δ, Δ' *se coupent.*

4° *Quel lieu* Γ *doit décrire le point* M *pour que la droite* Δ *demeure dans un plan fixe* Π,

$$ux + vy + wz + p = 0.$$

Les coordonnées du point M *s'expriment alors rationnellement en fonction d'un paramètre.*

Trouver l'enveloppe E *de la droite* Δ *dans le plan* Π.

5° *Quel est le lieu de cette enveloppe quand le plan* Π *se meut parallèlement à lui-même?*

6° *D'après la quatrième partie, à tout plan* Π *se trouve attachée une ligne* Γ, *qui est le lieu des points pour lesquels la droite* Δ *correspondante se trouve dans le plan* Π *et, dans ce plan, ces droites* Δ *enveloppent une certaine courbe* E. *On suppose maintenant qu'un point* M *décrive le plan* Π : *montrer que la droite* Δ *correspondante s'appuie constamment en deux points sur la ligne* Γ *et que, réciproquement, toute corde de* Γ *correspond à un point* M *du plan* Π.

7° *Quel lieu décrit* Δ *quand le point* M *se déplace sur une tangente de la ligne* E, *ou bien quand le point* M *se meut sur la ligne* E *elle-même?*

Considérations géométriques. — Étant données deux quadriques, soit T leur tétraèdre conjugué commun de sommets A, B, C, D, les plans polaires d'un point M se coupent suivant une droite Δ qui est l'intersection de deux plans se correspondant homographiquement; par suite, l'ensemble de ces droites Δ constitue un complexe tétraédral ayant pour plans et points singuliers les faces et les sommets du tétraèdre T.

Remarquons que les conjuguées de Δ, par rapport aux deux surfaces, se coupent en M, et réciproquement toute droite dont les polaires se coupent est l'intersection des plans polaires du point de rencontre de ces conjuguées. De plus, la droite joignant les pôles d'un plan Q par rapport aux deux surfaces a des conjuguées se coupant dans ce plan Q et fait partie du complexe, et réciproquement toute droite Δ de ce complexe contient

les pôles du plan déterminé par ses deux conjuguées; on peut donc dire que le complexe est défini de l'une des trois manières suivantes, qui sont équivalentes : c'est l'ensemble des intersections des plans polaires d'un point variable, l'ensemble des droites joignant les pôles d'un plan variable, et l'ensemble des droites dont les polaires se coupent. (*Voir* SCHRÖTTER, *Journal de Crelle*, t. 77; REYE, *Géométrie de position*, IIe Volume, p. 159.)

Quand le point M décrit une droite quelconque D de l'espace, Δ engendre une surface réglée du second ordre, car elle est l'intersection de deux faisceaux homographiques de plans ayant pour axes les conjuguées de D; pour que cette surface soit un cône, il faut et il suffit que ces conjuguées se coupent, par conséquent que D fasse partie du complexe; le cône est alors du second ordre. Pour que les droites Δ, Δ′ relatives à deux points M et M′ se coupent, il faut et il suffit que les quatre plans polaires de ces deux points passent par un même point, ou que les conjuguées de M et M′ se coupent, par suite que MM′ fasse partie du complexe.

Les droites Δ, situées dans un plan π, enveloppent la courbe E du complexe de ce plan, courbe qui est tangente aux quatre faces du tétraèdre T; on sait que si π tourne autour d'une droite située dans le plan d'une face, le lieu de ces courbes E est un cône ayant pour sommet le sommet du tétraèdre opposé à la face considérée.

Pour trouver le lieu des points M relatifs aux droites Δ du plan π, remarquons que les conjuguées de toutes les droites de ce plan, par rapport aux deux surfaces, décrivent deux gerbes homographiques autour des pôles p et p' de ce plan; celles qui se rencontrent correspondent aux droites Δ du complexe, et l'on sait que le lieu

de leurs points de rencontre est une cubique gauche passant par p et p'; cette cubique est identique au lieu des pôles du plan π par rapport aux surfaces du faisceau ponctuel déterminé par les deux quadriques données, et passe par les quatre sommets du tétraèdre T.

Supposons maintenant que le point M se déplace dans le plan π; soient Δ_1 et Δ_2 les tangentes issues de ce point à la courbe E; d'après la propriété des pôles et des plans polaires, la droite Δ relative à M doit contenir les deux points M_1 et M_2 relatifs à Δ_1 et Δ_2; c'est donc une droite s'appuyant sur la cubique en ces deux points M_1, M_2, et réciproquement à une corde $M_1 M_2$ correspond l'intersection M de Δ_1 et Δ_2. Si M décrit Δ_1, Δ décrit le cône s'appuyant sur la cubique et ayant pour sommet M_1. Si M est sur la courbe E, M_1 et M_2 sont confondus, et Δ est une tangente à la cubique; lorsque M décrit la courbe E, Δ engendre la développable de quatrième ordre formée par les tangentes à la cubique.

SOLUTION ANALYTIQUE.

Soient x, y, z les coordonnées du point M,

$$(\Delta)\quad \begin{cases} \dfrac{Xx}{a^2} + \dfrac{Yy}{b^2} + \dfrac{Zz}{c^2} - 1 = 0, \\[2ex] \dfrac{Xx}{r^2} + \dfrac{Yy}{r^2} + \dfrac{Zz}{r^2} - 1 = 0, \end{cases}$$

les équations de la droite Δ correspondante; nous désignons le rayon de la sphère par r pour éviter les confusions de notation dans ce qui suit.

Remarquons immédiatement que si la droite Δ passe par un point α, β, γ, la droite relative à ce dernier point passe par le point M.

Les coordonnées radiales de Δ sont

$$A = x\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right), \qquad P = \frac{yz}{r^2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right),$$
$$B = y\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2}\right), \qquad Q = \frac{zx}{r^2}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right),$$
$$C = z\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{c^2}\right), \qquad R = \frac{xy}{r^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right);$$

par suite, cette droite appartient au complexe tétraédral

$$(\mathrm{T}) \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\mathrm{AP} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\mathrm{BQ} \\ &\qquad + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\mathrm{CR} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si le point M décrit la droite D définie par les équations

$$(\mathrm{D}) \quad x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_0 + \lambda z_1}{1 + \lambda},$$

le lieu de Δ est la surface

$$\frac{\dfrac{Xx_0}{a^2} + \dfrac{Yy_0}{b^2} + \dfrac{Zz_0}{c^2} - 1}{\dfrac{Xx_1}{a^2} + \dfrac{Yy_1}{b^2} + \dfrac{Zz_1}{c^2} - 1} = \frac{\dfrac{Xx_0}{r^2} + \dfrac{Yy_0}{r^2} + \dfrac{Zz_0}{r^2} - 1}{\dfrac{Xx_1}{r^2} + \dfrac{Yy_1}{r^2} + \dfrac{Zz_1}{r^2} - 1},$$

ou, en désignant par A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0, R_0 les coordonnées de D,

$$\sum \frac{YZ}{r^2} A_0\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) - \sum X P_0\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right) = 0;$$

elle admet, comme second système de génératrices, les polaires de D par rapport aux surfaces du faisceau ponctuel déterminé par l'ellipsoïde et la sphère.

Les droites Δ qui passent par un point P décrivent le cône du complexe relatif à ce point; les points M cor-

respondants décrivent la droite Δ relative à P, d'après la remarque faite précédemment.

Pour que les droites $\Delta\Delta'$, relatives à deux points $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$, se coupent, il faut et il suffit que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} & -1 \\ \frac{x}{r^2} & \frac{y}{r^2} & \frac{z}{r^2} & -1 \\ \frac{x'}{a^2} & \frac{y'}{b^2} & \frac{z'}{c^2} & -1 \\ \frac{x'}{r^2} & \frac{y'}{r^2} & \frac{z'}{r^2} & -1 \end{vmatrix}$$

soit nul, et cette condition développée exprime que la droite MM' fait partie du complexe T; c'est aussi la condition pour que la surface réglée relative à la droite MM' soit un cône.

Pour que la droite Δ soit située dans un plan π de coordonnées u, v, w, p, il faut et il suffit que l'on puisse mettre l'équation de ce plan sous la forme

$$\frac{Xx}{r^2} + \frac{Yy}{r^2} + \frac{Zz}{r^2} - 1$$
$$+ \mu\left[Xx\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right) + Yy\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right) + Zz\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}\right)\right] = 0;$$

nous écrirons pour simplifier

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{\alpha^2}{r^2}, \qquad \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{\beta^2}{r^2}, \qquad \frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{\gamma^2}{r^2},$$

nous aurons alors

$$-\frac{u}{p} = \frac{x}{r^2}(1 + \mu\alpha^2), \qquad -\frac{v}{p} = \frac{y}{r^2}(1 + \mu\beta^2),$$
$$-\frac{w}{p} = \frac{z}{r^2}(1 + \mu\gamma^2).$$

d'où

$$x = -\frac{u}{p}\frac{r^2}{1 + \mu\alpha^2}, \qquad y = -\frac{v}{p}\frac{r^2}{1 + \mu\beta^2}, \qquad z = -\frac{w}{p}\frac{r^2}{1 + \mu\gamma^2}.$$

Ces équations définissent, quand μ varie, le lieu du point M; c'est une cubique Γ passant par l'origine et par les points à l'infini sur les axes; réciproquement, la droite Δ relative à un point de cette cubique est située dans le plan π.

Le plan passant par Δ et par l'origine a pour équation

$$\mathrm{X}x\alpha^2 + \mathrm{Y}y\beta^2 + \mathrm{Z}z\gamma^2 = 0,$$

ou, en remplaçant x, y, z par les valeurs précédentes,

$$\frac{u\alpha^2\mathrm{X}}{1 + \mu\alpha^2} + \frac{v\beta^2\mathrm{Y}}{1 + \mu\beta^2} + \frac{w\gamma^2\mathrm{Z}}{1 + \mu\gamma^2} = 0;$$

les coordonnées U, V, W de ce plan sont proportionnelles aux coefficients de X, Y, Z et satisfont, quand μ varie, à l'équation

$$\begin{vmatrix} \mathrm{U} & \mathrm{U}\alpha^2 & u\alpha^2 \\ \mathrm{V} & \mathrm{V}\beta^2 & v\beta^2 \\ \mathrm{W} & \mathrm{W}\gamma^2 & w\gamma^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\Sigma\, u\mathrm{V}\mathrm{W}\alpha^2(\beta^2 - \gamma^2) = 0;$$

c'est l'équation de la trace sur le plan de l'infini du cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice la courbe E du complexe; on voit que cette courbe est une parabole tangente aux trois plans de coordonnées; comme l'équation est indépendante de p, on voit que le cône précédent est le lieu de la courbe E quand le plan π se déplace parallèlement à lui-même.

Supposons maintenant que le point M soit situé dans le plan π; en écrivant qu'il est sur une droite Δ de ce

plan, on forme l'équation

$$f(\mu) = \frac{u\alpha^2 x}{1+\mu\alpha^2} + \frac{v\beta^2 y}{1+\mu\beta^2} + \frac{w\gamma^2 z}{1+\mu\gamma^2} = 0;$$

cette équation du second degré a deux racines que nous appellerons μ_1 et μ_2; elles définissent deux droites Δ_1 et Δ_2 passant par M et tangentes à E; elles déterminent aussi deux points M_1 et M_2 relatifs à ces tangentes et situés sur la cubique Γ. D'après la remarque faite au début, la droite Δ relative au point M commun à Δ_1 et Δ_2 passe par les deux points M_1 et M_2 et est une corde de la cubique; réciproquement, toute droite joignant deux points M_1 et M_2 de cette courbe est une droite Δ relative au point commun aux deux droites Δ_1 et Δ_2, relatives à M_1 et M_2, et ce point appartient au plan π.

En identifiant $f(\mu)$ avec la fraction rationnelle

$$\frac{(ux+vy+wz)\alpha^2\beta^2\gamma^2(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)}{(1+\mu\alpha^2)(1+\mu\beta^2)(1+\mu\gamma^2)},$$

décomposée en fractions simples, et remarquant que le premier facteur du numérateur est égal à $-p$, on obtient les valeurs de x, y, z en fonction de μ_1 et de μ_2,

$$x = -\frac{p}{u}\,\frac{\beta^2\gamma^2(1+\mu_1\alpha^2)(1+\mu_2\alpha^2)}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\gamma^2)},$$

$$y = -\frac{p}{v}\,\frac{\gamma^2\alpha^2(1+\mu_1\beta^2)(1+\mu_2\beta^2)}{(\beta^2-\gamma^2)(\beta^2-\alpha^2)},$$

$$z = -\frac{p}{w}\,\frac{\alpha^2\beta^2(1+\mu_1\gamma^2)(1+\mu_2\gamma^2)}{(\gamma^2-\alpha^2)(\gamma^2-\beta^2)};$$

c'est une représentation des coordonnées des points du plan π dans laquelle les droites Δ_1 et Δ_2 sont mises en évidence; si l'on suppose $\mu_2 = \mu_1$, on obtient les coordonnées des points de la courbe E.

Les équations de la droite Δ relative à un point M

peuvent être remplacées par les suivantes

$$Xx + Yy + Zz - r^2 = 0,$$
$$Xx\alpha^2 + Yy\beta^2 + Zz\gamma^2 = 0,$$

ou bien, en introduisant les paramètres μ_1 et μ_2,

$$\sum \frac{X}{u} \frac{\beta^2\gamma^2(1-\mu_1\alpha^2)(1-\mu_2\alpha^2)}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\gamma^2)} - \frac{r^2}{p} = 0,$$
$$\sum \frac{X}{u} \frac{(1-\mu_1\alpha^2)(1-\mu_2\alpha^2)}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\gamma^2)} = 0.$$

Si le point M se déplace sur la tangente Δ_1 à E, μ_1 reste constant, et l'on obtient le lieu de la droite Δ en éliminant μ_2 entre les équations précédentes; en posant

$$H = \sum \frac{X}{u} \frac{1}{\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\gamma^2)},$$
$$K = \sum \frac{X}{u} \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\gamma^2)},$$
$$L = \sum \frac{X}{u} \frac{\alpha^2}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\gamma^2)},$$
$$M = \sum \frac{X}{u} \frac{\alpha^4}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\gamma^2)},$$

on peut les écrire

$$\frac{r^2}{p} - H - (\mu_1 + \mu_2)K - \mu_1\mu_2 L = 0,$$
$$K + (\mu_1 + \mu_2)L + \mu_1\mu_2 M = 0,$$

et l'élimination de μ_2 donne l'équation

$$(K - \mu_1 L)^2 - (L - \mu_1 M)\left(\frac{r^2}{p} - H - \mu_1 K\right) = 0,$$

qui représente un cône ayant pour sommet M_1 et pour directrice la cubique Γ. Si M est sur la courbe E, on a $\mu_1 = \mu_2$, et le lieu de Δ s'obtient en éliminant μ_1 entre les équations précédentes où μ_2 a été remplacé par μ_1;

son équation est

$$\left(KL - MH - M\frac{r^2}{p}\right)^2 - 4(L^2 - KM)\left(K^2 - HL - L\frac{r^2}{p}\right) = 0;$$

ce lieu n'est autre que la développable formée par les tangentes successives à la cubique Γ.

VARIÉTÉS.

Le nouveau programme d'admission à l'École Polytechnique.

Il y a deux manières de concevoir l'élaboration d'un programme. On peut le développer longuement, donner en détail les matières qui le composent, ou bien, au contraire, se borner à de larges indications. Dans les deux cas, une très grande part d'interprétation reste aux mains des examinateurs qui auront à l'appliquer, et il n'en peut être autrement.

Quoi qu'il en soit, malgré le soin qu'on y apporte, un programme est toujours une œuvre imparfaite et incomplète, car on ne peut tout prévoir. La seconde méthode nous semblerait donc préférable, sauf à corriger le trop grand laconisme par quelques explications suggérées par la mise en pratique; il faut avoir confiance dans le jugement des examinateurs et dans celui des professeurs appelés à préparer les candidats. Sinon, aucun programme n'apportera d'amélioration aux imperfections qu'on aura pu constater.

Mais, lorsque sous une forme ou sous une autre, le programme d'admission, pour un concours tel que celui de l'Ecole Polytechnique, a été arrêté dans ses grandes

lignes, on devrait le respecter, n'y apporter que de très légères retouches d'année en année, en le faisant bénéficier seulement des progrès scientifiques accomplis. C'est un édifice à entretenir, à réparer, qu'on peut agrandir au besoin, mais qu'il faut se garder de démolir trop souvent pour le reconstruire en entier. Il ne semble pas, malheureusement, qu'on se soit inspiré de cette méthode progressive depuis une vingtaine d'années, et notamment dans le nouveau programme du 24 juillet 1896, actuellement en vigueur, et que nous avons à étudier aujourd'hui.

Il nous sera permis de le faire, en y apportant, avec toute la réserve possible dans la forme, la plus entière franchise dans l'expression de notre pensée.

Ce programme, sur un point, a été inspiré par une intention excellente. On avait cru reconnaître que les candidats ne possédaient pas toujours suffisamment les éléments des Mathématiques, et l'on a voulu leur imposer un peu d'Arithmétique et de Géométrie. Nous allons voir tout à l'heure comment on y est parvenu. Puis, en vertu de ce principe de compensation qui veut que toute adjonction soit accompagnée de suppression pour ne pas trop alourdir la charge, il a été pratiqué dans le reste des matières de véritables coupes sombres, dont quelques-unes nous sembleraient désastreuses si ce nouveau système était appelé à durer, ce que nous ne croyons pas.

Le sujet comporterait d'assez longs développements ; mais, voulant nous restreindre, nous nous contenterons de rapides observations sur quelques points, en suivant l'ordre des matières.

Arithmétique. — Le texte est fort court, mais cependant détaillé, et l'esprit du programme paraît être limi-

tatif. On commence à la théorie du plus grand commun diviseur; pas un mot de la divisibilité. Il n'est pas question des propriétés les plus élémentaires des nombres premiers, mais la décomposition d'un nombre en facteurs premiers est explicitement énoncée, de même que le système métrique. Il s'ensuit qu'un candidat pourrait se refuser légitimement à donner les caractères de divisibilité d'un nombre par 9 ou même par 2, mais qu'il n'aurait rien à objecter s'il se voyait repoussé pour ne pas connaître les dimensions précises d'un litre en métal ou le poids d'une pièce de 20 francs.

Les progressions, le calcul des radicaux, les exposants fractionnaires figurent ici. Est-ce une grande amélioration de ne pas avoir laissé ces matières dans l'Algèbre?

Géométrie. — Sur le rapport anharmonique, l'involution, l'homographie, le programme reste muet. Il ne parle même pas de la division harmonique, tout en portant : « Pôle et polaire par rapport à un cercle. » Il est fâcheux qu'on n'ait pas profité de cette introduction de la Géométrie, que nous sommes loin de blâmer, pour y placer franchement les notions essentielles de Géométrie moderne qui peuvent être d'un secours si puissant dans l'étude des coniques.

Algèbre. — Nous laissons de côté toute critique de détail pour arriver au point le plus grave : nous voulons parler de la suppression de toutes notions sur les infiniment petits et sur l'emploi de la notation différentielle. Après bien des efforts persévérants, les mathématiciens avaient obtenu, depuis plusieurs années, l'introduction de ces notions, indispensables en ce qui concerne les applications. C'est un recul de plus de vingt ans qu'on

fait subir d'un coup à l'enseignement des Mathématiques spéciales. La suppression de la décomposition des fractions rationnelles et de la belle formule d'interpolation de Lagrange auraient dû suffire aux personnes qui croient alléger un programme d'Algèbre en en extirpant les idées les plus générales; et l'on trouvera peu de mathématiciens pour se consoler du mauvais sort que subit la notation de Leibnitz.

Trigonométrie. — De même d'ailleurs que dans l'ancien programme, on trouve ici : « Théorème des projections ». Nous avons cherché vainement, depuis de longues années, ce que pouvait être ce théorème. Jadis on disait : « Théorie des projections » et l'on n'avait pas tort, car c'est *l'ensemble* des propositions sur les projections qui en fait l'intérêt. Mentionnons la disparition des notions, bien sommaires pourtant, de Trigonométrie sphérique qu'on avait laissé subsister jusqu'ici.

Géométrie analytique. — Le texte nouveau est surtout caractérisé par un renversement bien significatif. On exposait antérieurement les diverses théories générales relatives aux courbes planes, et l'on appliquait ces théories aux courbes du second degré. Actuellement, les courbes du second degré figurent d'abord, et c'est seulement après que vient l'étude des théories générales. Il est juste de reconnaitre que certains candidats avaient peut-être une tendance exagérée à faire usage de théories générales compliquées pour résoudre les problèmes les plus simples. Mais tous les problèmes ne sont pas simples, même dans l'étude des coniques, et n'aurait-on pas pu remédier à ce petit inconvénient, autrement qu'en reléguant après les courbes du second degré des théories qui comprennent à peu près toute la Géométrie analytique?

Mécanique. — On avait introduit, depuis quelques années, dans le programme, la Cinématique et la Dynamique du point, et la Statique d'un solide invariable. La Statique seule subsiste, avec des singularités de rédaction sur lesquelles nous n'insistons pas. On y a joint des notions sur l'équilibre des machines simples, sans frottement : singulière préparation pratique pour de futurs ingénieurs, quand on réfléchit que les machines ne sont jamais en équilibre et que le frottement y intervient toujours, excepté quand elles cessent de travailler. Par contre, le professeur de Physique devra donner aux candidats des notions succinctes de Mécanique, en grande partie chassées du programme de Mathématiques ; nous cherchons où peut être l'avantage de cette classification plaçant les notions succinctes dont il s'agit entre le vernier et le principe de Pascal, après l'optique, mais avant la chaleur.

La Mécanique est loin d'être une science facile à enseigner. On peut se demander très sérieusement s'il convient de l'exiger des candidats à l'École Polytechnique, même réduite à ses éléments les plus simples. Mais une fois la question résolue, il conviendrait d'accepter nettement la solution par oui ou par non, et de ne pas déchirer, en quelque sorte, en lambeaux ce malheureux enseignement qui demanderait de l'unité. Remarquons, du reste, qu'en dépit du mot la statique du solide invariable n'est pas de la Mécanique : c'est une sorte de Géométrie particulière. Ce qu'il y a de plus regrettable dans tout ceci, c'est que de tels bouleversements réagissent d'une manière grave sur l'enseignement de la Mécanique à l'École Polytechnique elle-même. Suivant que les élèves sont ou non en possession des notions générales formant, en quelque sorte, une introduction à la Mécanique rationnelle, le rôle des profes-

seurs est tout différent, et le nombre des leçons doit changer. Un peu d'unité et de continuité serait un bienfait de premier ordre.

En résumé, la lecture de ce nouveau programme nous a causé une profonde tristesse, car il consacre un recul considérable et montre l'inutilité finale des rares progrès accomplis par des générations successives de professeurs, de travailleurs et de savants.

Notre consolation, et elle est faible, réside dans la conviction où nous sommes des mécomptes que ce régime nouveau donnera dans l'application. Lorsqu'on aura bien constaté qu'on a abaissé le niveau des études préparatoires sans faciliter le rôle des examinateurs; quand l'aléa, comme conséquence, viendra jouer, dans les examens, un rôle plus grand que celui qu'il tient de la fatalité des choses, alors force sera bien de reconnaître le mal et de chercher à y remédier.

Ce jour-là, le programme de 1896 sera déchiré et anéanti; moins il aura fonctionné, moins il aura fait de mal. Mais puisse la leçon profiter! Et lorsque, l'année prochaine peut-être (car le plus tôt sera le mieux), on reprendra la question, nous supplions tous ceux qui auront à l'étudier de doter l'École Polytechnique d'un programme d'admission mûri, réfléchi, appelant sans doute des perfectionnements possibles, mais destiné à durer dans son ensemble. Nous les supplions surtout de rétablir la notation différentielle, dont on ne peut se passer et qui n'offre réellement pas plus de difficultés dans l'enseignement que la théorie des dérivées, qu'elle complète et qu'elle éclaire.

La Rédaction.

AVIS.

Conservatoire national des Arts et Métiers.

Parmi les cours publics et gratuits de Sciences appliquées aux Arts, ouverts depuis le commencement de novembre, pour l'année 1896-1897, nous signalons spécialement à l'attention de nos lecteurs ceux dont voici l'énumération :

Géométrie appliquée aux Arts. — M. Laussedat, professeur, suppléé par M. P. Haag.

Géométrie descriptive. — M. Rouché, professeur.

Mécanique appliquée aux Arts. — M. Hirsch, professeur.

Constructions civiles. — M. Pillet, professeur.

Physique appliquée aux Arts. — M. Violle, professeur.

Électricité industrielle. — M. Marcel Deprez, professeur.

ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES. CONCOURS DE 1896 (DEUXIÈME SESSION).

Géométrie analytique.

On donne l'angle XOY et les points A, sur OX, B sur OY, tels que $OA = OB = a$.

Problème I. — 1° *Écrire l'équation générale des coniques* S *circonscrites au triangle* AOB *et tangentes en* A *à la parallèle* AY' *à* OY. *Trouver le lieu de leur centre.*

2° *Par chaque point du plan passe une conique* S : *Séparer les régions du plan pour lesquelles l'espèce de cette conique reste la même. Construire graphiquement*

les points communs à une droite arbitraire OZ *et à la ligne qui sépare ces régions; tangentes en ces points.*

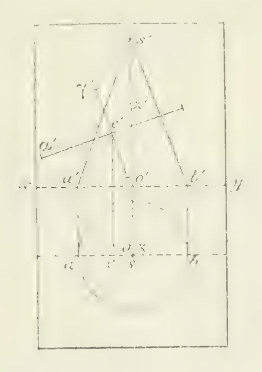
PROBLÈME II. — 1° *Former l'équation générale des paraboles* S' *passant par les points* A, B *et dont l'axe contient le point* O.

2° *Trouver le lieu géométrique des points* M *par lesquels passent deux paraboles* S' *ayant leurs axes rectangulaires. Prouver que la droite* A'B', *symétrique de* AB *par rapport au point* O, *doit faire partie du lieu.*

3° *Lieu des sommets des paraboles* S'; *ce lieu se compose d'une droite et d'une courbe qu'on propose de tracer (on pourra s'aider d'un changement de direction des axes de coordonnées). Vérifier que cette courbe présente une inflexion en chacun des points* A, B.

Géométrie descriptive.

On considère : 1° un cône de révolution à axe vertical $(oz, o'z')$, et dont la base est un cercle de 80^{mm} de rayon situé dans le plan horizontal; la cote du sommet est 210^{mm}; 2° un



ellipsoïde de révolution à axe de front $(ck, c'k')$ dirigé perpendiculairement à la génératrice de front $(sb, s'b')$, et rencontrant l'axe du cône en k' $(c'k' = 25^{mm}, o'k' = 80^{mm})$.

Le centre de l'ellipse méridienne est en (c, c'). Les demi-axes de cette ellipse sont respectivement $c'\alpha' = 110^{mm}$ et $c'\gamma' = 60^{mm}$. On demande : 1° de tracer les contours apparents

des deux surfaces; 2° de déterminer les projections de l'intersection de ces deux surfaces en ayant soin d'indiquer les constructions nécessaires pour obtenir les points et les tangentes remarquables de ces courbes; 3° de représenter l'ensemble formé par le cône et l'ellipsoïde, en supprimant de cette dernière surface les parties extérieures aux deux plans tangents au cône suivant les génératrices de front $(sa, s'a')$ et $(sb, s'b')$.

Nota. — Les portions de contours apparents extérieures au solide représenté se traceront en traits bleus.

Cadre 27^{cm} sur 45^{cm}. xy parallèle aux petits côtés du cadre et au milieu. $o's'$ parallèle aux grands côtés et au milieu de la feuille.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1711.

(1896, p. 192.)

Quand on déroule une épicycloïde sur la tangente au sommet, le lieu des extrémités du rayon de courbure est une conique. (Riccati) (¹).

SOLUTION

Par M. Audibert.

Désignons par θ l'angle variable que fait avec l'axe des X le rayon vecteur allant du centre du cercle fixe, pris pour origine, au point de contact des deux cercles, par ρ, r et nr les rayons de courbure du cercle roulant et du cercle fixe. L'épicycloïde sera représentée, à l'aide de la variable auxiliaire θ, par les deux équations

$$y = nr\sin\theta - 2r\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{n-2}{2}\theta,$$

$$x = nr\cos\theta - 2r\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n-2}{2}\theta.$$

(¹) *Voir* t. XV, p. 245: il semble que c'est par erreur que la question a été attribuée à Riccati.

On en déduit

$$dy = 2(n+1)r\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n+2}{2}\,d\theta,$$

$$dx = 2(n+1)r\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{n-2}{2}\,d\theta,$$

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = 2(n+1)^2(n+2)r^2\sin^2\frac{n\theta}{2}\,\overline{d\theta}^3,$$

$$dS = 2(n+1)r\sin\frac{n\theta}{2}\,d\theta,$$

$$S = \int_0^\theta dS = 4\frac{n+1}{n}r\left(1-\cos\frac{n\theta}{2}\right) = Y,$$

$$\rho = \frac{\overline{dS}^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = 4\frac{n+1}{n+2}r\sin\frac{n\theta}{2} = X;$$

d'où, en éliminant $\frac{n\theta}{2}$, l'équation

$$(n+2)^2X^2 + n^2Y^2 - 8n(n+1)rY = 0,$$

qui représente une ellipse.

En faisant $n=\infty$, on a le cas particulier de la cycloïde; le lieu est alors le cercle

$$X^2 + Y^2 - 8rY = 0.$$

M. Barisien fait remarquer que la question énoncée est tout à fait générale et s'applique au déroulement de l'épicycloïde sur la tangente en un point quelconque I de la courbe.

On voit de plus que toutes les ellipses obtenues sont égales.

Question 1712.

(1896, p. 103.)

On considère une série d'hyperboles équilatères homothétiques par rapport à leur centre commun O, *et dont l'axe transverse commun est* OX. *Dans chacune d'elles, on trace un rayon* OM *qui détache un secteur d'aire donnée à partir de* OX. *Trouver le lieu du point* M.

(C.-A. Laisant.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

Soient $xy = a^2$, ou $\rho^2 \sin\theta\cos\theta = a^2$, l'équation d'une des hyperboles, K^2 le double de l'aire donnée, on aura

$$K^2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \rho^2\, d\theta = a^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin\theta\cos\theta} = a^2\, \mathrm{L}\,\mathrm{tang}\,\theta.$$

Éliminant a^2 et passant aux coordonnées rectangulaires, l'équation du lieu s'écrira

$$(1) \qquad xy\, \mathrm{L}\frac{y}{x} = K^2;$$

elle représente une courbe dont le centre est à l'origine et qui n'existe que dans la région du plan où y et x sont de même signe et satisfont à l'inégalité $y > x$ en valeur absolue.

Le lieu consiste donc en deux branches situées dans les deux angles opposés formés par l'axe des y et la bissectrice $y = x$. Chacune de ces droites est asymptote. En différentiant (1), on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}\,\frac{\mathrm{L}\frac{y}{x} - 1}{\mathrm{L}\frac{y}{x} + 1}.$$

La droite $y = ex$ coupe chaque branche au point

$$y = \pm k\sqrt{e},\; x = \pm \frac{k}{\sqrt{e}},$$

où la tangente est parallèle à la ligne des abscisses. La dérivée seconde de y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{x^2}\,\frac{2\,\mathrm{L}\frac{y}{x}\left(\mathrm{L}\frac{y}{x}\right)^2 + 1}{\left(\mathrm{L}\frac{y}{x} + 1\right)^3},$$

ne pouvant s'annuler ni devenir infinie à aucun point réel à distance finie, la courbe n'a pas de points d'inflexion; elle a l'aspect d'une sorte d'hyperbole déformée située dans le même

angle, ayant les mêmes asymptotes, mais dissymétrique par rapport à la bissectrice et infléchie vers l'axe des y.

Question 1714.

(1896, p. 103.)

Étant donnés, dans un plan, quatre couples de points (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1), (D, D_1) *tels qu'aucun des quadrilatères analogues au quadrilatère* AA_1BB_1 *ne soit inscriptible, prouver qu'il existe, dans ce plan, deux couples de points* (X, Y) *tels que chacun des quatre quadrilatères analogues au quadrilatère* AA_1XY *soit inscriptible.*

(X. Antomari).

SOLUTION

Par M. E. Duporcq.

Soient Ω_b, Ω_c et Ω_d trois cercles passant respectivement par les couples de points (B, B_1), (C, C_1) et (D, D_1) et admettant deux à deux un même axe radical bcd qui coupe aux points b, c et d les droites BB_1, CC_1 et DD_1. Le point b est commun aux axes radicaux du cercle Ω_d et de tous les cercles passant par les points B et B_1; l'un quelconque des cercles qui passent par les points C et C_1, et le cercle Ω_d ont de même un axe radical passant par le point c. A tout point b de la droite BB_1 correspond ainsi un cercle Ω_d et, par suite, un point c de CC_1, et inversement; les points b et c déterminent donc sur les droites BB_1 et CC_1 deux divisions homographiques : l'enveloppe de la droite bc est donc une conique (α), inscrite au triangle formé par les droites BB_1, CC_1 et DD_1. (Si, contrairement à l'hypothèse, le quadrilatère BB_1CC_1, par exemple, avait été inscriptible, cette enveloppe se serait réduite au point de concours des droites BB_1 et CC_1.)

Considérons la conique (β) qui correspond de même aux couples (C, C_1), (D, D_1) et (A, A_1); elle admet avec (α) deux tangentes communes autres que les droites CC_1 et DD_1, et l'on voit que l'on peut déterminer quatre circonférences passant respectivement par l'un des quatre couples considérés, et admettant deux à deux pour axe radical l'une de ces tangentes communes. Sur chacune de ces deux droites existe donc un couple de points (X, Y) répondant aux conditions de l'énoncé.

On peut remarquer que si les perpendiculaires aux milieux des segments AA_1, BB_1, CC_1 et DD_1 sont concourantes (et dans ce cas seulement), les quatre coniques (α), (β), (γ) et (δ) deviennent des paraboles, et l'on n'obtient alors qu'un couple (X, Y) à distance finie : l'autre correspond aux cercles concentriques.

QUESTIONS.

1754. Trouver un polynome entier, en p.

$$f(x, p) = A_0 p^m + A_1 p^{m-1} + \ldots + A_{m-1} p + A_m,$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m$ désignent des fonctions de la variable x, tel que l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$y = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$$

s'obtienne en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par une constante arbitraire.

Les équations ainsi obtenues ont-elles des intégrales singulières?

Nota. — On examinera plus particulièrement le cas où le polynome $f(x, p)$ est du second degré en p.

On écartera les solutions du problème qui conduisent à une équation de *Clairaut*. (C. BOURLET.)

1755. Calculer les deux intégrales définies

$$\int_0^\infty e^{-x^2 t} \cos[x(y - \alpha)]\,dx,$$

et

$$\int_0^\infty e^{-x^2 t} \sin[x(y - \alpha)]\,dx.$$

où t désigne une constante *positive* et où y et α sont des constantes *arbitraires*. (C. BOURLET.)

CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1896.

Résultat.

En réponse à l'annonce du Concours pour 1896, la Rédaction a reçu seize Mémoires. Beaucoup de ces travaux présentent des qualités remarquables et dénotent une sérieuse érudition. Quelques auteurs ont cru devoir donner une multiplicité de méthodes, révélant une étude approfondie; mais ce système a le double inconvénient d'allonger la rédaction et de nuire à l'unité de l'ensemble.

Parmi les Mémoires qui ont été retenus, on a accordé la préférence à celui dont l'auteur, tout en traitant le sujet d'une façon complète, arrivait au résultat le plus simplement, sans efforts excessifs de calcul, par l'emploi des méthodes les plus élémentaires et sous une forme à la fois claire et concise.

Il a semblé que le travail de M. R. Gilbert réunissait ces qualités au plus haut degré, et qu'il présentait ainsi une supériorité manifeste sur les autres Mémoires parvenus à la Rédaction. En conséquence, le prix est décerné à M. R. Gilbert, qui a été immédiatement avisé. Son Mémoire paraîtra dans l'un de nos plus prochains numéros.

CONGRÈS DE ZURICH.

Le Congrès préparatoire aux futurs Congrès mathématiques internationaux se tiendra cette année à Zurich, les 9, 10 et 11 août; le Comité d'organisation poursuit activement sa tâche, et nous ne manquerons pas, s'il y a lieu, de tenir nos lecteurs au courant des autres résolutions qui pourraient être adoptées et portées à notre connaissance.

[A31] [G6c]

SUR LES RACINES DE L'ÉQUATION $x = a^x$. RACINES IMAGINAIRES;

Par M. E.-M. Lémeray.

L'étude des racines réelles a fait l'objet d'une Note précédente; je m'occuperai ici des racines imaginaires.

Supposons d'abord $a > 1$, et soit

$$\rho e^{\theta\sqrt{-1}}$$

une des racines imaginaires. Posons

$$\rho \cos\theta = u, \qquad \rho \sin\theta = v.$$

La relation à laquelle il faut satisfaire peut s'écrire

$$\rho e^{\theta\sqrt{-1}} = e^{\mathrm{L}a \rho e^{\theta\sqrt{-1}}} = e^{\mathrm{L}a(u+v\sqrt{-1})}.$$

Prenons les logarithmes; l'équation équivaut aux deux suivantes :

$$\mathrm{L}\rho = u\,\mathrm{L}a, \tag{1}$$

$$\theta = v\,\mathrm{L}a. \tag{2}$$

Si, sur deux axes de coordonnées rectangulaires, nous figurons les courbes représentatives de ces équations, leurs intersections donneront la représentation des racines de notre équation; il faudra toutefois ne pas tenir compte des points situés entre les droites

$$v = (2k-1)\frac{\pi}{\mathrm{L}a} \qquad \text{et} \qquad v = (2k-2)\frac{\pi}{\mathrm{L}a},$$

ces points correspondant à des racines étrangères. La courbe (1) peut s'écrire

$$\rho = a^u \qquad \text{ou encore} \qquad v = \pm\sqrt{a^{2u} - u^2}.$$

La courbe (2) peut aussi s'écrire

$$\rho = \frac{1}{La}\,\frac{\theta}{\sin\theta} \qquad \text{ou encore} \qquad u = \frac{v}{\operatorname{tang}(v\,La)}.$$

On peut donc calculer leurs coordonnées. On peut aussi les tracer géométriquement par points de la manière suivante : soit M un point de la courbe $v = a^u$, menons MN parallèle à OV et ML parallèle à OU ; le cercle ayant O pour centre et OL pour rayon coupe MN en N ; N est un point de la courbe (1).

Par O menons une droite OP faisant avec OU un angle dont la tangente soit égale à $\frac{1}{La}$; par O menons une droite OF_0 faisant avec OU un angle θ; sur OU prenons OT égal à l'arc θ et menons la parallèle TP à OV jusqu'à sa rencontre P avec OP; par P menons une parallèle à OU ; elle coupe OF_0 en Q; Q est un point de la courbe (2).

Quand on a $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$, la courbe (1) se compose d'une branche fermée AB, et d'une branche infinie C, asymptote à l'exponentielle $v = a^u$. Les points A, B, C ont les mêmes abscisses que les points d'intersection de l'exponentielle $v = a^u$ avec les droites $v = \pm u$. Quand $a = e^{\frac{1}{e}}$, les points B et C se confondent; quand a est plus grand que $e^{\frac{1}{e}}$, les deux branches se fondent en une seule.

Quand $a = e$, la courbe (2) se compose d'une branche non représentée sur la figure, qui coupe OU en S, tel que $OS = 1$; pour $u = -\infty$, elle est asymptote aux droites $v = \pm\pi$; elle se compose aussi d'une infinité de branches telles que DE, comprises chacune entre les droites $v = k\pi$ et $v = (k+1)\pi$ (¹), auxquelles elle est

(¹) Les branches utiles sont celles comprises entre les droites $v = 2k\pi$ et $v = (2k+1)\pi$.

asymptote respectivement pour $u = +\infty$ et $u = -\infty$: elle coupe Ov au point d'ordonnée

$$(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

et les droites $v = \pm u$ respectivement aux points d'ordonnée

$$(2k+1)\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{4}.$$

Quand on a une valeur différente de e, la courbe (2) reste semblable à celle qui vient d'être décrite; elle ne fait que changer d'échelle.

Je vais maintenant montrer que, pour un point racine, le module de la dérivée $\frac{da^x}{dx}$ est toujours plus grand que 1. En effet, ce module est

$$M = a^u La = \rho La.$$

Comme sur un point racine quelconque on vérifie l'équation (2), on a

$$\rho La = \frac{\theta}{\sin\theta};$$

on en tire

$$M = \frac{\theta}{\sin\theta},$$

quantité toujours plus grande que 1, sauf pour $\theta = 0$. D'après le théorème déjà rappelé de M. Kœnigs, la substitution

$$(\rho e^{\theta\sqrt{-1}}, \quad a^{\rho e^{\theta\sqrt{-1}}})$$

ne tendra donc vers aucune racine de l'équation, quelle que soit la valeur initiale. Donc l'expression

$$\left.\begin{matrix} m \\ \cdot \\ a \end{matrix}\right| \rho_0 e^{\theta_0\sqrt{-1}}$$

sera divergente quel que soit a. Mais si la fonction $a^x = \left.\begin{matrix} 1 \\ \cdot \\ a \end{matrix}\right| x$ a une dérivée dont le module est plus grand

que 1, en chaque point racine, son inverse $\frac{Lx}{La} = \overset{-1}{\dot{a}} \Big| x$ aura un module de la dérivée plus petit que 1 ; mais la fonction n'étant pas holomorphe, nous n'aurons convergence par le symbole

$$\overset{-m}{\dot{a}} \Big| \rho_0 e^{\theta_0 \sqrt{-1}}$$

que si nous convenons de ne prendre parmi toutes ses déterminations que celle qui est comprise dans le domaine d'un point racine donné.

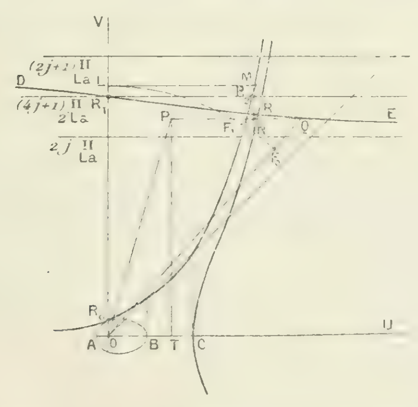
D'une manière générale, étant donné un point (ρ_0, θ_0), cherchons un point (ρ_1, θ_1) ou (u_1, v_1), représentant, dans le système de base a, le logarithme de la quantité

$$\rho_0 e^{\theta_0 \sqrt{-1}};$$

on devra avoir

$$L\rho_0 = u_1 La,$$
$$\theta_0 = v_1 La.$$

Ces équations permettront de calculer u_1 et v_1, puis ρ_1 et θ_1. Cela correspond à la construction suivante :



soit F_0 le point (ρ_0, θ_0). Le cercle de centre O, passant

en F_0, coupe la courbe ABC en N : la droite OF_0 coupe la courbe DE en Q ; la parallèle à OV passant par N et la parallèle à OU passant en Q, déterminent le point cherché F_1. (Remarquons que les courbes ABC et DE pouvant se construire par points comme on l'a vu plus haut, on peut déterminer F_1 géométriquement au moyen de la courbe $v = a^u$, de droites et de cercles.)

Cela posé, prenons pour initial la quantité $\sqrt{-1}$, c'est-à-dire

$$\rho_0 = 1, \qquad \theta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Elle est représentée par le point R_0 ; en appliquant la construction, nous aurons d'abord le point R, intersection de l'axe OV avec la droite $v = (4j+1)\frac{\pi}{2La}$, j étant la valeur entière particulière donnée à K dans l'expression de v_1

$$v_1 = \frac{\delta}{La} + (4K-1)\frac{\pi}{2La},$$

où δ est un angle plus petit que $\frac{\pi}{2}$; en continuant ainsi et attribuant à K la même valeur j, nous obtenons le point R_2, situé sur la courbe

$$v = a^u,$$

et ainsi de suite ; les points obtenus tendront successivement vers le point R qui représente une racine imaginaire. Les racines conjuguées correspondront à l'initial $-\sqrt{-1}$.

Cas de $a < 1$. — Posons $a = \frac{1}{a'}$; nos courbes deviennent

(1') $$\rho = a'^{-u},$$

(2') $$\theta = -v La'.$$

La courbe (1′) est simplement la symétrique de la courbe (1) déjà considérée. Il en est de même de la courbe (2′). Mais dans ce cas les branches qui nous donnent les racines de la proposée sont les symétriques des branches qui précédemment nous donnaient des racines étrangères et inversement.

Ce qui a été dit pour la grandeur du module s'applique encore, et toujours, avec les mêmes conventions : l'expression

$$\overset{-m}{\dot{a}}\Big| \pm\sqrt{-1}$$

tendra vers les racines de l'équation proposée. Soit $a = e^z$: posons

$$U(z) - \sqrt{-1}\,V(z) = \overset{-m \,|\, -\sqrt{-1}}{\dot{e}^{z}}$$

$$U(z) - \sqrt{-1}\,V(z) = \overset{-m \,|\, -\sqrt{-1}}{\dot{e}^{z}} ;$$

d'où

$$U(z) = \frac{\overset{-m}{\dot{e}^{z}}\Big|\sqrt{-1} + \overset{-m}{\dot{e}^{z}}\Big| -\sqrt{-1}}{2}$$

$$V(z) = \frac{\overset{-m}{\dot{e}^{z}}\Big|\sqrt{-1} - \overset{-m}{\dot{e}^{z}}\Big|\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}.$$

Si l'on y fait

$$m = -1 \quad \text{et} \quad z = \theta,$$

ces fonctions deviennent $\cos\theta$ et $\sin\theta$ qui sont les coordonnées rectangulaires du cercle $\rho = 1$. Ce cercle est le lieu des racines imaginaires de l'équation

$$x^2 - 2ax - 1 = 0,$$

quand a varie de 0 à 1 : a est relié à θ par la relation

$$a = \cos\theta.$$

Dans notre cas, éliminons a entre les équations (1) et (2); on a

$$\frac{\theta}{L\rho} = \frac{v}{u} = \tan\theta.$$

d'où

$$(3) \qquad \rho = e^{\frac{\theta}{\tan\theta}}.$$

On en tire

$$z = La = \frac{\theta}{v} = \frac{\theta}{\rho \sin\theta} = \frac{\theta}{\sin\theta\, e^{\frac{\theta}{\tan\theta}}}.$$

La courbe (3) est le lieu décrit par les racines imaginaires de notre équation quand a varie; si nous désignons par $u(z)$ et $v(z)$ ce que deviennent les fonctions $U(z)$ et $V(z)$ quand on y fait

$$m = x, \qquad z = \frac{\theta}{\sin\theta\, e^{\frac{\theta}{\tan\theta}}},$$

$u(z)$, $v(z)$ sont les coordonnées de la courbe (3), et a est relié à θ par la relation

$$a = \left(\frac{\theta}{e^{\sin\theta}}\right)^{\frac{1}{e^{\frac{\theta}{\sin\theta}\cos\theta}}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{a} = \left(\frac{-\theta}{e^{\sin\theta}}\right)^{2\cos\theta}.$$

Si l'on appelle surracine [1] $n^{\text{ième}}$ de a et si l'on représente par le symbole $\sqrt[n]{a}$ la racine de l'équation

$$\overset{n}{x} = a,$$

on a, pour $n = 2$,

$$x^x = a \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{a},$$

---

[1] *Sur les fonctions itératives* (*Association française, Congrès de Bordeaux*, 1895).

et par conséquent

$$\sqrt[2]{a} = \frac{1}{\left.\pm m\,\right|_{\lim \dot{a}^{-1}} e^{\pm 1}},$$

pour les racines réelles et

$$\sqrt[2]{a} = \frac{1}{\left.\pm m\,\right|_{\lim \dot{a}^{-1}} \pm\sqrt{-1}},$$

pour les racines imaginaires.

Dans une prochaine Note, je donnerai des applications de ce qui précède à quelques équations transcendantes et à l'intégration d'une équation aux différences mêlées.

[D2d]

SUR UNE REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DU DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE ORDINAIRE;

Par M. HUSQUIN DE RHÉVILLE.

Ingénieur civil.

L'étude sommaire du remarquable procédé de représentation géométrique du développement en fraction continue, exposé, dans les *Nouvelles Annales* (1896, p. 327), par M. le professeur Klein, nous a conduit à une remarque simple, dont l'intérêt principal nous paraît être la traduction géométrique de la convergence de la fraction continue.

En désignant, comme l'auteur de l'article rappelé ci-dessus, par $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, ... les réduites successives de la

fraction continue convergente

$$\omega = \mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cfrac{1}{\mu_3 + \cfrac{1}{\ddots}}},$$

on connait les formules de récurrence

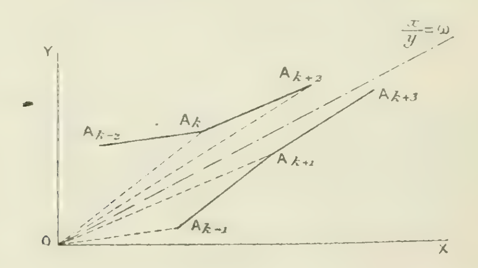
$$p_{k+1} = p_k \mu_{k+2} + p_{k-1},$$
$$q_{k+1} = q_k \mu_{k+2} + q_{k-1}.$$

L'élimination de μ_{k+2} entre ces deux formules nous fournit la relation

$$\frac{p_{k+1} - p_{k-1}}{q_{k+1} - q_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k},$$

dont l'interprétation, dans le système de représentation de M. Klein, est celle-ci :

Chaque côté de l'un des deux polygones d'approximation est parallèle au rayon qui joint l'origine au sommet intermédiaire de l'autre polygone.



Ainsi que l'indique la figure ci-dessus, cette remarque permet de préciser singulièrement le mode de convergence des contours polygonaux qui sont, naturellement, asymptotiques à la droite $\frac{x}{y} = \omega$.

[A3c]

SUR LES CONDITIONS QUI EXPRIMENT QU'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE DE DEGRÉ m N'A QUE p RACINES DISTINCTES ($p < m$);

PAR M. X. ANTOMARI.

---

1. La difficulté de ce problème réside dans ce fait qu'une équation algébrique de degré m peut n'avoir que p racines distinctes de plusieurs manières. Considérons, en effet, l'équation indéterminée à p inconnues

$$(1) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_p = m,$$

et soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ une solution de cette équation, *telle qu'aucune des inconnues ne soit nulle et que toutes soient des nombres entiers et positifs*. Une équation algébrique de degré m, qui a une racine d'ordre α_1, une racine d'ordre α_2, etc., enfin une racine d'ordre α_p, n'a évidemment que p racines distinctes; il en résulte qu'il y a, pour une équation de degré m, autant de manières d'avoir p racines distinctes seulement qu'il y a de solutions de l'équation (1) en nombres entiers, positifs et tous différents de zéro.

Si donc on exprime que l'équation considérée n'a que p racines distinctes, on exprime par cela même qu'elle a une racine d'ordre α_1, une racine d'ordre α_2, etc. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ désignant l'une quelconque des solutions de l'équation (1) en nombres entiers, positifs et tous différents de zéro. On trouve ainsi un système de conditions qui doit se décomposer en autant de systèmes qu'il y a, pour l'équation (1), de solutions de l'espèce considérée, de sorte qu'à chaque solution il correspond

un système de conditions. Dans ce qui suit, je me propose de montrer comment on peut trouver le système de conditions qui correspond à une solution donnée de l'équation (1). Je m'appuie pour cela sur le théorème suivant :

2. *Pour qu'une équation algébrique et entière* $f(x) = 0$, *de degré m, n'ait que p racines distinctes, il faut et il suffit qu'il existe deux polynomes entiers en* x, $\varphi_p(x)$ *et* $\varphi_{p-1}(x)$ *premiers entre eux, de degrés respectifs p et* $p-1$ *et vérifiant l'identité*

$$\varphi_p(x) f'(x) = \varphi_{p-1}(x) f(x), \tag{2}$$

$f'(x)$ *désignant la dérivée de* $f(x)$.

Soient, en effet, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ les p racines distinctes de l'équation et soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs, tels que l'on ait, d'ailleurs,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = m.$$

On a alors

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha_1}{x-a_1} + \frac{\alpha_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{\alpha_p}{x-a_p};$$

de sorte que, si l'on pose

$$\varphi_p(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_p),$$

$$\varphi_{p-1}(x) = \sum \alpha_1(x-a_2)\ldots(x-a_p),$$

on a bien l'identité

$$\varphi_p(x) f'(x) = \varphi_{p-1}(x) f(x).$$

La condition est donc nécessaire, car il est évident que les polynomes $\varphi_p(x)$ et $\varphi_{p-1}(x)$ sont premiers entre eux.

Il faut prouver que la condition est suffisante. Pour

cela, observons d'abord que si $\frac{f'(x)}{f(x)}$ est décomposée en fractions simples, les fractions obtenues ont leurs dénominateurs respectifs du premier degré. Cela posé, supposons l'identité (2) vérifiée et les polynomes $\varphi_p(x)$ et $\varphi_{p-1}(x)$ premiers entre eux ; on en déduit la nouvelle identité

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\varphi_{p-1}(x)}{\varphi_p(x)},$$

en vertu de laquelle la décomposition du second membre en fractions simples ne doit donner que des fractions à dénominateurs du premier degré, d'après la remarque faite plus haut; par suite, $\varphi_p(x) = 0$ *doit avoir ses* p *racines distinctes*, et, en effectuant la décomposition, on aura une nouvelle identité de la forme

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha_1}{x-a_1} + \frac{\alpha_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{\alpha_p}{x-a_p};$$

en remontant aux fonctions primitives, on en déduit successivement

$$\mathrm{L}f(x) = \mathrm{LC}(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_p)^{\alpha_p}$$

et

$$f(x) = \mathrm{C}(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_p)^{\alpha_p}.$$

Comme, d'ailleurs, $f(x)$ est un polynome entier en x, de degré m, cette nouvelle identité ne peut avoir lieu que si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont des nombres entiers et positifs, tous différents de zéro et vérifiant l'égalité $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = m$. Il en résulte bien que l'équation $f(x) = 0$ n'a que p racines distinctes et que la condition est suffisante.

3. Étant donnée maintenant une solution particulière $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ de l'équation (1), proposons-nous d'ex-

primer qu'une équation $f(x)=0$, de degré m, a une racine multiple d'ordre α_1, une racine multiple d'ordre α_2, ..., enfin une racine multiple d'ordre α_p. Pour résoudre ce problème, on pourrait procéder de la manière suivante :

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$ les racines d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$; on a alors

$$(3) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum \frac{\alpha_1}{x-a_1},$$

d'où l'on tire

$$(4) \qquad \begin{cases} (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_p)f'(x) \\ \qquad = f(x)\sum \alpha_1(x-a_2)\ldots(x-a_p). \end{cases}$$

Par conséquent, pour qu'une équation de degré m ait une racine d'ordre α_1, une racine d'ordre α_2, ..., il faut qu'on puisse déterminer p quantités $a_1, a_2, \ldots, a_p$ telles qu'on ait l'identité (4).

La réciproque est vraie, car on passe facilement de l'identité (4) à l'identité (3), de laquelle on déduit

$$f(x) = C(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_p)^{\alpha_p}.$$

D'après cela, pour résoudre le problème, il suffira d'éliminer $a_1, a_2, \ldots, a_p$ entre les équations qu'on obtient en identifiant les deux membres de (4). On obtient ainsi $m+p-1$ équations d'identification, puisque $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p=m$, et si l'on élimine $a_1, a_2, \ldots, a_p$ entre ces équations, on obtient $m-1$ équations de condition, c'est-à-dire plus de conditions qu'il n'en faut, puisque, pour exprimer toutes les conditions du problème, il suffit de

$$\alpha_1 - 1 + \alpha_2 - 1 + \ldots + \alpha_p - 1 = m - p \text{ conditions.}$$

Outre la difficulté d'élimination des quantités $a_1, a_2, \ldots$

a_p, la méthode que nous venons d'expliquer présente donc l'inconvénient de donner des conditions en nombre surabondant.

4. Difficulté et inconvénient disparaissent si l'on fait usage du théorème démontré au n° 2. Si l'on cherche, en effet, par la méthode des coefficients indéterminés les polynomes $\varphi_p(x)$ et $\varphi_{p-1}(x)$, qui vérifient l'identité

$$f'(x)\varphi_p(x) = f(x)\varphi_{p-1}(x),$$

on obtient $m+p$ équations linéaires et homogènes à $2p+1$ inconnues, et l'élimination des inconnues, qui sont les coefficients des polynomes $\varphi_p(x)$ et $\varphi_{p-1}(x)$, fournissent exactement $m-p$ conditions entre les coefficients de l'équation $f(x)=0$. Seulement, on se trouve alors en présence d'une autre difficulté; car, si au lieu de considérer la solution $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ de l'équation (1), on en avait considéré une autre, rien ne distinguant ces solutions dans la suite des calculs, on aurait trouvé les mêmes $m-p$ conditions. Il en résulte, ainsi que cela a déjà été dit au début, que ces $m-p$ conditions doivent se décomposer en systèmes en nombre égal au nombre des solutions de l'équation (1) en nombres entiers, positifs et tous différents de zéro.

5. Une solution de l'équation (1) étant donnée, il s'agit maintenant de trouver le système de conditions correspondant. Pour cela, appelons $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ la solution considérée. Si $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont les p racines de $\varphi_p(x)=0$, racines qui sont distinctes en vertu du théorème démontré au n° 2, le polynome $\varphi_{p-1}(x)$ est égal à $\Sigma\alpha_1(x-a_2)\ldots(x-a_p)$, en vertu de 4. On a donc

$$\alpha_1 = \frac{\varphi_{p-1}(a_1)}{\varphi'_p(a_1)}, \qquad \alpha_2 = \frac{\varphi_{p-1}(a_2)}{\varphi'_p(a_2)}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_p = \frac{\varphi_{p-1}(a_p)}{\varphi'_p(a_p)}.$$

Considérons alors les équations

$$(5)\qquad \varphi_p(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi_{p-1}(x) + \lambda\varphi'_p(x) = 0.$$

Si l'on remplace λ par $-\alpha_1$ dans la dernière, les deux équations ont une racine commune a_1; elles ont une racine commune a_2 si l'on remplace λ par $-\alpha_2$, et ainsi de suite. Si donc l'on élimine x entre les deux équations (5), l'équation résultante $R(\lambda) = 0$, qui est de degré p et dont les coefficients sont des fonctions des coefficients de $\varphi_p(x)$ et de ceux de $\varphi_{p-1}(x)$, par suite des fonctions des coefficients de $f(x)$, cette équation $R(\lambda) = 0$, disons-nous, admettra les racines $-\alpha_1$, $-\alpha_2, \ldots, -\alpha_p$ si l'équation $f(x) = 0$ a une racine d'ordre α_1, une racine d'ordre α_2, etc.; elle admettra pour racines $-\alpha'_1, -\alpha'_2, \ldots, -\alpha'_p$, si $f(x) = 0$ a p racines d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_p$, et ainsi de suite.

L'équation $R(\lambda) = 0$ permettra donc de distinguer les uns des autres les divers systèmes de solutions. C'est elle qui caractérise et définit nettement les divers cas qui peuvent se présenter.

Nous allons appliquer ces considérations à deux exemples.

6. Soit d'abord à exprimer qu'une équation du quatrième degré

$$f(x) = x^4 + px^2 + qx - r = 0$$

n'a que deux racines distinctes. Si cette équation n'a que deux racines distinctes, elle peut avoir, ou deux racines doubles, ou une racine simple et une triple. Dans les deux cas, il faut et il suffit qu'il existe un polynome du premier degré $\alpha x + \beta$ et un polynome du

second degré $Ax^2 + ux + v$ vérifiant l'identité

$$(\alpha x + \beta)(x^4 + px^2 + qx + r) \\ = (Ax^2 + ux + v)(4x^3 + 2px + q).$$

On peut d'ailleurs supposer $A = 1$, puisque le degré du polynome $Ax^2 + ux + v$ ne doit pas être inférieur à 2, et comme alors α est évidemment égal à 4, l'identité précédente s'écrit

$$(6) \quad (4x + \beta)(x^4 + px^2 + qx + r) \\ = (x^2 + ux + v)(4x^3 + 2px + q).$$

Actuellement, on a

$$\varphi_p(x) = x^2 + ux + v,$$
$$\varphi'_p(x) = 2x + u,$$
$$\varphi_{p-1}(x) = 4x + \beta,$$

de sorte que l'équation

$$\varphi_{p-1}(x) + \lambda\varphi'_p(x) = 0$$

s'écrit

$$2(2 + \lambda)x + \beta + \lambda u = 0.$$

Si l'on élimine x entre cette équation et l'équation $\varphi_p(x) = 0$, on obtient

$$(\beta + \lambda u)^2 - 2u(2 + \lambda)(\beta + \lambda u) + 4v(2 + \lambda)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(7) \quad (4v - u^2)\lambda^2 + 4\lambda(4v - u^2) + \beta^2 - 4\beta u + 16v = 0.$$

Quand l'équation $f(x) = 0$ a deux racines doubles, -2 doit être racine double de l'équation (7); on doit donc avoir

$$\beta^2 - 4\beta u + 4u^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = 2u.$$

Quand, au contraire, l'équation f a une racine triple et une simple, l'équation (7) a pour racines -1 et -3.

La somme des racines étant -4, il suffit d'exprimer que -1 est racine, ce qui donne

$$\beta^2 - 4\beta u + 3u^2 + 4v = 0.$$

Ainsi, suivant que l'équation du quatrième degré a deux racines doubles ou une racine triple et une double, on doit avoir

$$(8)\qquad \beta = 2u$$

ou

$$(9)\qquad \beta^2 - 4\beta u - 3u^2 + 4v = 0.$$

Cela posé, identifions les deux membres de l'égalité (6); il vient alors

$$\begin{aligned} \beta &= 4u, \\ 4p &= 2p + 4v, \\ 4q + \beta p &= q \quad + 2pu, \\ \beta q + 4r &= qu + 2pv, \\ \beta r &= qv. \end{aligned}$$

Si l'on élimine β, u et v entre ces équations, on trouve facilement

$$(10)\qquad \left\{ \begin{aligned} 2p^3 - 8pr + 9q^2 &= 0, \\ q(p^2 + 12r) &= 0. \end{aligned} \right.$$

On a d'ailleurs

$$u = -\frac{3q}{2p}, \qquad v = \frac{p}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta = -\frac{6q}{p}.$$

Si l'on porte maintenant les valeurs de u, v et β dans les équations (8) et (9), la première de ces équations donne $q = 0$ et la deuxième donne pareillement $8p^3 + 27q^2 = 0$. Donc $q = 0$ caractérise le cas de deux racines doubles et $8p^3 + 27q^2 = 0$ caractérise le cas d'une racine simple et d'une racine triple. Il en résulte que, si l'on élimine r entre les équations (10), on doit

trouver $q = 0$ dans le premier cas et $8p^3 + 27q^2 = 0$ dans le deuxième. Autrement, le système (10) se décompose en deux

$$\begin{aligned} q &= 0 \\ 2p(p^2 - 4r) &= 0 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} 2p^3 - 8pr + 9q^2 &= 0, \\ p^2 + 12r &= 0. \end{aligned}$$

Le premier de ces systèmes correspond au cas de deux racines doubles et le second *doit* correspondre au cas d'une racine triple et d'une simple; par conséquent, en éliminant r entre les équations de ce dernier système, on doit trouver $8p^3 + 27q^2 = 0$. On le constate sans aucune difficulté. En résumé, si l'on observe que p ne peut pas être nul, on voit qu'il y a deux racines doubles si l'on a

$$q = 0 \quad \text{avec} \quad p^2 - 4r = 0,$$

une racine triple et une simple si l'on a

$$8p^3 + 27q^2 = 0 \quad \text{et} \quad p^2 + 12r = 0.$$

7. Soit maintenant à exprimer qu'une équation du cinquième degré

$$f(x) = x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

n'admet que deux racines distinctes.

Posons, comme dans l'exemple précédent,

$$\varphi_p(x) = x^2 + ux + v, \qquad \varphi_{p-1}(x) = \alpha x + \beta.$$

et formons l'équation

$$\varphi_{p-1}(x) + \lambda\,\varphi'_p(x) = 0;$$

nous obtenons ainsi

$$(\alpha + 2\lambda)x + \beta + \lambda u = 0,$$

de sorte que si l'on élimine x entre cette équation et

$\varphi_p(x) = 0$, il vient

$$(\beta + \lambda u)^2 - u(\beta + \lambda u)(\alpha + 2\lambda) + v(\alpha + 2\lambda)^2 = 0,$$

ou

$$(11)\quad (4v - u^2)\lambda^2 + \lambda(4v - u^2)\alpha + \beta^2 - \alpha\beta u + v\alpha^2 = 0.$$

Exprimons enfin que l'on a l'identité

$$\varphi_{p-1}(x)f(x) = \varphi_p(x)f'(x),$$

en vertu de laquelle on voit tout de suite que l'on doit avoir $\alpha = 5$, de sorte que l'identité s'écrit

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &(5x + \beta)(x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s) \\ &\quad = (x^2 + ux + v)(5x^4 + 3px^2 + 2qx + r), \end{aligned} \right.$$

et l'équation (11) devient

$$R(\lambda) = (4v - u^2)\lambda^2 + 5(4v - u^2)\lambda + \beta^2 - 5\beta u + 25v = 0.$$

L'identification des deux membres de (12) conduit aux équations

$$\begin{aligned} \beta &= 5u, \\ 2p &= 5v, \\ 3q + \beta p &= 3pu, \\ 4r + \beta q &= 2qu + 3pv, \\ 5s + \beta r &= ru + 2qv, \\ \beta s &= rv. \end{aligned}$$

Des trois premières équations on tire

$$v = \frac{2p}{5}, \qquad u = -\frac{3q}{2p}, \qquad \beta = -\frac{15q}{2p}$$

et, en portant dans les trois dernières, on obtient les équations de condition cherchées

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} 4r &= \frac{9q^2}{2p} + \frac{6p^2}{5}, \\ 5s &= \frac{6qr}{p} + \frac{4pq}{5}, \\ 15qs &+ \frac{4p^2r}{5} = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, si une équation du cinquième degré n'a que deux racines distinctes, elle peut avoir, soit une racine double et une racine triple, soit une racine quadruple et une simple. Le système de conditions trouvées doit donc se décomposer en deux autres correspondant aux deux cas qui peuvent se présenter. Dans le premier cas, l'équation $R(\lambda) = 0$ doit admettre les racines -2 et -3; elle doit admettre les racines -1 et -4 dans le second cas. Comme la somme des racines est toujours -5, pour exprimer qu'on est dans le premier cas, il suffit d'exprimer que -2 est racine; il suffit d'écrire que -1 est racine pour exprimer qu'on est dans le deuxième cas. On voit ainsi que si l'équation a une racine triple et une racine double, on doit avoir

$$v + 6u^2 = 0,$$

et que l'on doit avoir

$$9v - 4u^2 = 0$$

quand l'équation a une racine quadruple et une simple. Si l'on tient compte des valeurs trouvées pour u et pour v, ces équations s'écrivent respectivement

$$(14) \quad \begin{cases} 4p^3 - 5 \times 27q^2 = 0, \\ 2p^3 - 5q^2 = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, si, entre les équations (13), on élimine r et s, l'équation en p et en q ainsi obtenue doit se décomposer en les deux équations (14).

Un calcul facile donne

$$4r = \frac{9q^2}{2p} - \frac{6p^2}{5},$$

$$5s = 3q\left[\frac{9q^2}{4p^2} - \frac{13p}{15}\right].$$

En portant les valeurs de r et de s qu'on en déduit dans l'équation

$$15qs + \frac{4p^2r}{5} = 0,$$

on obtient l'équation

$$5^2 \times 9^2 \times q^4 + 5 \times 3 \times 58p^3q^2 + 24p^6 = 0,$$

de laquelle on tire

$$q^2 = \frac{-29p^3 \pm 25p^3}{5 \times 27},$$

c'est-à-dire

$$4p^3 + 5 \times 27q^2 = 0,$$

et

$$2p^3 + 5q^2 = 0,$$

qui sont bien les équations (14).

Ainsi, pour que l'équation

$$x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

ait une racine double et une racine triple, il faut et il suffit que l'on ait

$$4p^3 - 5 \times 27q^2 = 0, \qquad 4r = \frac{9q^2}{2p} + \frac{6p^2}{5},$$

$$5s = 3q\left[\frac{9q^2}{4p^2} + \frac{13p}{15}\right];$$

pour qu'elle ait une racine quadruple, il faut et il suffit que l'on ait

$$2p^3 + 5q^2 = 0, \qquad 4r = \frac{9q^2}{2p} + \frac{9p^2}{5},$$

$$5s = 3q\left[\frac{9q^2}{4p^2} + \frac{13p}{15}\right].$$

Dans le premier cas, les conditions s'écrivent plus

simplement

$$4p^3 + 27q^2 = 0, \qquad 5r - p^2 = 0, \qquad 14pq - 25s = 0;$$

dans le second cas, elles s'écrivent de même

$$2p^3 + 5q^2 = 0, \qquad 20r + 9p^2 = 0, \qquad 50s - pq = 0.$$

[F4a]

LE THÉORÈME D'ADDITION DE LA FONCTION $\wp(u)$ [1];

PAR M. PAUL STÄCKEL,
Professeur à l'Université de Königsberg.

Traduit de l'allemand, avec l'autorisation de l'auteur,
par M. L. LAUGEL.

Lorsque les grandeurs u_1, u_2, u_3 vérifient la condition

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$

le quotient

$$(2) \qquad \frac{\sigma(u + u_1)\sigma(u + u_2)\sigma(u + u_3)}{\sigma^3(u)} = f(u)$$

représente une fonction elliptique du troisième ordre, qui ne devient infinie qu'en les points qui sont congrus à zéro. Par conséquent, si l'on développe $f(u)$ suivant les puissances de u, le coefficient de u^{-1} doit s'évanouir identiquement, et l'on a, par suite,

$$(3) \quad \begin{cases} 0 = \sigma u_1 \sigma u_2 \sigma'' u_3 + \sigma u_2 \sigma u_3 \sigma'' u_1 + \sigma u_3 \sigma u_1 \sigma'' u_2 \\ \qquad + 2\sigma u_1 \sigma' u_2 \sigma' u_3 + 2\sigma u_2 \sigma' u_3 \sigma' u_1 + 2\sigma u_3 \sigma' u_1 \sigma' u_2. \end{cases}$$

---

(1) *Mathematische Annalen*, t. XLVII, 4e Cahier, p. 604; 1896.

ou, après une transformation facile à pratiquer,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = \frac{\sigma'' u_1}{\sigma u_1} - \left(\frac{\sigma' u_1}{\sigma u_1}\right)^2 + \frac{\sigma'' u_2}{\sigma u_2} - \left(\frac{\sigma' u_2}{\sigma u_2}\right)^2 \\ + \frac{\sigma'' u_3}{\sigma u_3} - \left(\frac{\sigma' u_3}{\sigma u_3}\right)^2 + \left(\frac{\sigma' u_1}{\sigma u_1} + \frac{\sigma' u_2}{\sigma u_2} + \frac{\sigma' u_3}{\sigma u_3}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Or, nous avons les équations [H. A. SCHWARZ, *Formeln und Lehrsätze*... [1], Article 9 (1), Article 11 (4)] :

$$(5)\qquad \frac{\sigma'' u}{\sigma u} - \left(\frac{\sigma' u}{\sigma u}\right)^2 = -\,p(u),$$

$$(6)\quad \frac{\sigma' u_1}{\sigma u_1} + \frac{\sigma' u_2}{\sigma u_2} + \frac{\sigma' u_3}{\sigma u_3} = -\frac{1}{2}\,\frac{p' u_1 - p' u_2}{p u_1 - p u_2}, \quad (u_1 + u_2 + u_3 = 0);$$

par suite, la relation (4) est équivalente à celle-ci :

$$(7)\qquad p u_1 + p u_2 + p u_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{p' u_1 - p' u_2}{p u_1 - p u_2}\right)^2,$$

qui précisément exprime *le théorème d'addition de la fonction* $p(u)$ *sous sa forme classique.*

[M¹6l3]

SUR L'APPLICATION DE DEUX COVARIANTS À LA CONSTRUCTION DE QUELQUES ESPÈCES DE COURBES;

PAR M. S. MANGEOT,

Docteur ès sciences.

Je considère une courbe plane F, représentée par l'équation entière

$$f(x, y) = 0,$$

relativement à deux axes de coordonnées rectangulaires

---

(1) Traduit par M. Padé. Paris, Gauthier-Villars et fils.

quelconques Ox, Oy, et soient Φ, Ψ les deux lignes que définissent respectivement, par rapport à ces axes, les équations

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

$$\psi(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0,$$

dont les premiers membres sont des covariants de f pour toute substitution orthogonale.

Si l'on calcule les formes particulières que prennent ces deux covariants lorsqu'on substitue à f le premier membre de l'équation qui représente l'une des courbes suivantes : cissoïde, strophoïde droite, lemniscate, conchoïde de cercle, par rapport aux axes liés à la courbe auxquels on la rapporte habituellement, l'examen de ces formes conduit aux résultats que voici, quand la courbe F est du troisième ou du quatrième ordre.

Pour que la courbe F soit une cissoïde, il faut et il suffit que Ψ soit une hyperbole, et que, en rapportant la courbe aux deux axes de cette conique, son équation prenne la forme

$$y'^2(x' - a) + (x' + a)^3 = 0.$$

Pour que la courbe F soit une strophoïde droite, il faut et il suffit que Ψ soit une hyperbole, que Φ soit une droite déterminée perpendiculaire à son axe transverse D, et que, en rapportant la courbe aux deux droites D et Φ, son équation ait la forme

$$x'(x'^2 + y'^2) - a(x'^2 - y'^2) = 0.$$

Pour que F soit une lemniscate ou une conchoïde de cercle, il est nécessaire et suffisant que Φ soit un cercle et que, en désignant par x_0, y_0 les coordonnées du centre de cercle, la fonction $f(x + x_0, y + y_0)$ ait la

forme

$$(x^2+y^2)^2 - A(x^2-y^2) - Bxy,$$

ou celle-ci

$$(x^2+y^2-a^2)^2 - b^2[x^2+y^2-2a(x\cos\alpha+y\sin\alpha)-a^2].$$

Dans les quatre cas, on connaîtra la position de la courbe par rapport aux axes Ox, Oy, et sa grandeur. Lorsque l'équation $f(x,y)=0$ représente une cissoïde (ou une strophoïde droite), la distance du point double à l'asymptote a pour expression

$$2.3^{-\frac{1}{4}}\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\delta^{\frac{3}{4}}} \quad \left(\text{ou } \tfrac{1}{2}\,3^{\frac{3}{4}}\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\delta^{\frac{3}{4}}}\right),$$

en appelant Δ le discriminant de la fonction du second degré $\varphi(x,y)$ et δ celui des termes du second degré de cette fonction.

Si $f(x,y)=0$ est l'équation d'une lemniscate, le carré de la distance de son centre à l'un de ses sommets a pour valeur $2\sqrt{\frac{u}{\varphi}-f}$, u désignant la fonction $\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2$, qui est ici divisible par φ.

[L¹1c]

THÉORÈMES DE PASCAL ET DE BRIANCHON;

Par M. F. FARJON.

Un hexagone circonscrit à une conique peut être considéré comme la perspective du polygone gauche formé par six génératrices rectilignes d'une quadrique gauche alternativement du premier et du deuxième

système. Les trois couples de génératrices opposées déterminent trois plans formant un trièdre qui a pour arêtes les diagonales de l'hexagone ; celles-ci se coupent donc en un même point (théorème de Brianchon).

Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6 les sommets de l'hexagone ; les plans tels que 123, 234, ... ont pour traces, sur le plan du Tableau, les côtés d'un hexagone inscrit. Considérons les deux plans opposés 123, 456 ; leur intersection est déterminée par les intersections des deux couples de génératrices opposées 12, 45 et 23, 56 ; de plus, sa trace sur le plan du Tableau est l'intersection des deux côtés opposés correspondants de l'hexagone inscrit. En appliquant la même construction aux deux autres couples de plans opposés, on reconnaît que leurs intersections sont dans un même plan avec la précédente, et les trois points de rencontre des côtés opposés de l'hexagone inscrit situés sur la trace de ce plan sont en ligne droite (théorème de Pascal).

La même figure peut servir à démontrer d'autres théorèmes. Ainsi, les faces du trièdre des diagonales de l'hexagone circonscrit ont pour traces sur le plan du Tableau les diagonales de l'hexagone inscrit ; celles-ci se coupent donc deux à deux sur les diagonales de l'hexagone circonscrit, etc.

Ce mode de raisonnement fait découler des principes les plus élémentaires de la Géométrie dans l'espace la démonstration de propositions de Géométrie plane dont la preuve est faite habituellement par des procédés artificiels. Exemple : les propriétés des triangles homologiques, qui sont évidentes lorsque l'on considère la figure comme la perspective d'un trièdre coupé par deux plans.

NOTE SUR UNE QUESTION DE LICENCE [1];

Par M. Audibert.

D'après le texte de la quatrième question d'Analyse proposée aux candidats à la Licence, à Rennes, l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2(x^2 + y^2), \qquad \text{ou} \qquad z^2 = m(x^2 + y^2),$$

dériverait, par la détermination de la fonction arbitraire, de l'équation générale des surfaces pour lesquelles MN = ON.

Or, $z^2 = m(x^2 + y^2)$ représente un cône de révolution autour de l'axe OZ, et, dans ce cas, MN est le côté d'un triangle rectangle dont ON est l'hypoténuse.

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE NOVEMBRE 1896. — COMPOSITIONS.

Paris.

Analyse. — I. *Une surface S étant rapportée à trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *soient* M *un*

[1] *Voir* octobre 1896, p. 475.

point de S, MT *la tangente en* M *à la section de* S *par le plan* zOM, T *le point où* MT *rencontre* Oz. *Soient, de plus,* m *la projection de* M *sur* Oz *et* P *la projection de* M *sur le plan* xOz.

Former et intégrer l'équation aux dérivées partielles que vérifient toutes les surfaces pour lesquelles le produit Mm × OT *des segments* Mm *et* OT *est égal (en tout point* M) *à* $\overline{\mathrm{OP}}^2$.

(*On pourra prendre comme fonction le* z *du point* M, *et, comme variables indépendantes, les coordonnées polaires* r *et* θ *de la projection du point* M *sur le plan* xOy).

L'équation demandée est

$$\frac{z}{r} - \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{z^2}{r^2} + \cos^2\theta,$$

équation homogène qu'on sait intégrer. On trouve

$$z = r\cos\theta \operatorname{tang}\left[\cos\theta \log\frac{F(\theta)}{r}\right],$$

en désignant par F(θ) une fonction arbitraire.

II. *Soit* z *une variable complexe et soit* J(z) *l'intégrale*

$$J(z) = \int_1^z \frac{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3}{z(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dz + C.$$

Posons

$$\varphi(z) = e^{J(z)}, \qquad F(z) = \varphi(z) + \frac{1}{\varphi(z)}.$$

1° *Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier* C *et les coefficients* α, β, γ, δ, *pour que la fonction* F(z) *soit uniforme dans tout le plan?*

2° *Quelles conditions faut-il ajouter pour que* F(z) *se réduise à une fonction rationnelle de* z?

Mécanique. — I. *Un disque circulaire* A, *de rayon* R, *est fixé dans un plan vertical. Un deuxième disque circulaire* B, *homogène et pesant, de même rayon* R, *est mobile dans le même plan vertical et assujetti à rester en contact avec le disque* A, *sur lequel il peut glisser sans frottement.*

Le disque B *est abandonné sans vitesse initiale, dans une position telle que la droite* AB, *joignant les centres des disques, fasse, avec la verticale ascendante, un angle de* 45°.

Trouver le mouvement du disque B; *former l'équation déterminant l'angle que fait la droite* AB *avec la verticale ascendante au moment où le disque* B *quitte le disque* A.

II. *Un segment de droite* AB, *mobile dans un plan* π, *est assujetti aux conditions suivantes : il glisse sur un point fixe* O *du plan* π, *et il est vu sous un angle droit d'un autre point* C *de ce plan.*

Trouver le centre instantané de rotation et les courbes décrites par ce point dans le plan π, *d'une part, et, d'autre part, dans un plan lié invariablement au segment* AB. *On supposera la longueur du segment* AB *double de la distance* OC.

Épreuve pratique. — *On a observé à* $6^h 13^m 11^s,3$ (*temps sidéral*) *le passage au premier méridien d'une étoile dont les coordonnées sont*

Ascension droite.............	$7^h 58^m 17^s,6$
Distance polaire.............	$44° 9' 53''$

On demande de déterminer : 1° *la latitude du lieu*

d'observation ; 2° l'erreur que produirait sur cette latitude une erreur d'une seconde sur l'instant du passage ; 3° l'erreur qui résulterait d'une erreur d'une seconde d'arc sur l'azimut du premier vertical.

Besançon.

Analyse. — *Étant donné un système d'axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *soient deux points* A *et* B, *dont les coordonnées sont respectivement*

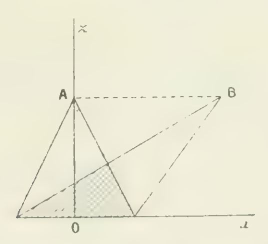
$$\text{A}\ldots \quad x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = h,$$
$$\text{B}\ldots \quad x = b, \qquad y = 0, \qquad z = h,$$

et une circonférence C *représentée par les équations*

$$x^2 - y^2 = a^2, \qquad z = 0;$$

a, b, h *sont des quantités positives données.*

On considère les deux surfaces coniques qui ont



pour base commune la circonférence C *et pour sommets respectifs les points* A *et* B.

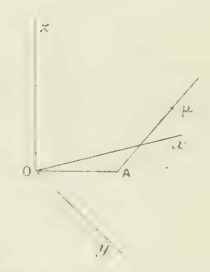
On demande de calculer le volume limité par ces deux surfaces coniques et par le plan des xy.

Dans le croquis, les points de ce volume se projettent sur le plan xOz, *suivant la partie indiquée par des hachures.*

On remarque que les deux cônes se coupent suivant

une seconde courbe plane. On peut évaluer le volume demandé en le partageant en tranches infiniment minces, soit par des plans parallèles au plan des xy, soit par des plans passant par la ligne des sommets. Dans ce dernier cas, chaque tranche pourra être assimilée, en négligeant les infiniment petits du second ordre, à un tronc de prisme triangulaire, et l'on est ramené à l'intégration d'une fraction rationnelle.

Mécanique. — *Un tube rectiligne peut tourner autour d'une verticale* Oz. *Dans ce tube est mobile sans*



frottement une bille pesante. Le tube fait avec Oz *un angle* α, *et sa distance à cet axe est* a; m *est la masse du tube,* μ *celle de la bille.*

Déterminer en fonction du temps la distance $\mu A = q$ *et l'angle* $AOx = \theta$. (*On suppose que* OA *est la perpendiculaire commune au tube et à l'axe.*)

Examiner les divers cas particuliers que présente la question pour des valeurs particulières de a *et de* α.

Emploi du principe des forces vives et du théorème du moment des quantités de mouvement autour de Oz.

Astronomie. — *Calculer la distance angulaire géocentrique de* α *de l'Aigle au centre de la Lune, le* 19 *août* 1885, *à* 6^h, *temps moyen de Paris.*

On prendra pour données les ascensions droites et les déclinaisons des deux astres.

Caen.

ANALYSE et GÉOMÉTRIE. — I. *Si, considérant u comme une fonction de x, on calcule suivant la règle connue la dérivée seconde de la fonction composée $f(x, u)$, on tombe sur une expression renfermant à la fois les quatre quantités x, u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$.*

Cela fait, et considérant désormais x, u, $\frac{du}{dx}$ et $\frac{d^2u}{dx^2}$ comme quatre variables indépendantes distinctes, on déterminera la fonction $f(x, u)$ par la condition que l'expression dont il s'agit soit le produit d'une fonction F *des seules variables x et u par la quantité*

$$\alpha + 2\beta \frac{du}{dx} + \gamma \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{d^2u}{dx^2},$$

où α, β, γ désignent trois constantes données. Relation qui doit exister entre α, β et γ pour que le problème soit possible.

II. *En désignant par* C *une courbe plane donnée, on propose de rechercher les surfaces réglées satisfaisant à la double condition : 1° que toute génératrice rencontre la courbe* C *à angle droit ; 2° que* C *soit une ligne de courbure de la surface cherchée.*

I. La fonction f doit visiblement satisfaire aux conditions

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\alpha} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}}{\beta} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}}{\gamma} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{1},$$

$\frac{\partial f}{\partial u}$ étant précisément F. Intégrant l'équation qui résulte

de l'égalité des deux dernières fractions, on a, si $\gamma \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = e^{\gamma u}\varphi(x), \qquad f = \frac{1}{\gamma} e^{\gamma u}\varphi(x) + \psi(x);$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}$ est égal à $e^{\gamma u}\varphi'(x)$; pour qu'il soit aussi égal à $\dfrac{\partial f}{\partial u}$, il faut que $\varphi(x)$ soit de la forme $Ae^{\beta x}$.

L'égalité de la première et de la quatrième fractions donne alors l'équation

$$\frac{A\beta^2}{\gamma} e^{\beta x+\gamma u} + \psi''(x) = \alpha A e^{\beta x+\gamma u};$$

elle exige que β^2 soit égal à $\alpha\gamma$ et donne ensuite

$$\psi''(x) = 0, \qquad \psi(x) = Bx + C,$$
$$f(x, u) = Ae^{\beta x+\gamma u} + Bx + C.$$

Si γ est nul, on trouve d'abord que $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ est de la forme $\varphi(x)$, puisque β doit être nul et f de la forme

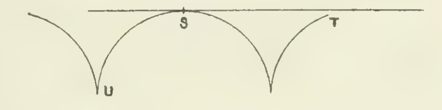
$$f(x, u) = A(u + \tfrac{1}{2}\alpha x^2) + Bx + C.$$

II. D'après le théorème de Joachimsthal, le plan tangent à la surface cherchée S aux divers points de C fait un angle constant avec le plan P de cette courbe; or, cet angle est mesuré par l'angle des génératrices avec leurs projections sur P; si P était horizontal, S serait une surface à pente constante et développable; les lignes de courbure étant les génératrices et les lignes de niveau.

On trouvera beaucoup de formes pour la solution analytique.

Mécanique. — I. *Dans un plan fixe* P, *on donne une cycloïde* U *et la droite* ST *qui la touche en l'un de ses sommets* S. *Un triangle* ABC *glisse sur le plan* P

de manière que le sommet A *reste sur la droite* ST *et que le côté* AB *soit constamment tangent à* U, *le point de contact se déplaçant sur la cycloïde avec une vitesse*



constante. Lieux du centre instantané de rotation dans le plan P *et dans le plan du triangle. Pour une position donnée de ce triangle, déterminer le centre de courbure de la trajectoire du point* C *et le centre des accélérations du plan mobile.*

II. *Sur un cône dont toutes les génératrices font avec la verticale un angle de 45°, déterminer une courbe* C *telle que, si un point pesant glisse sur cette courbe sans frottement, il exercera sur elle une pression constamment horizontale; la courbe* C, *qui est fixe, a sa tangente horizontale en un point situé à la hauteur h au-dessus du sommet du cône et le mobile considéré y est animé d'une vitesse égale à $\sqrt{2gh}$. Loi du mouvement; direction et grandeur de la pression exercée sur* C *par le point pesant dans une position quelconque.*

I. Soit, dans une position quelconque du triangle, M le point où AB touche U : on voit sans peine que le centre instantané est au point le plus bas du cercle générateur passant par M ; son lieu dans le plan P est la base de la cycloïde ; dans le plan mobile, c'est un cercle de centre A et de rayon $2a$, a étant le rayon du cercle générateur.

Le centre de courbure de la trajectoire de C s'obtient par la construction de Savary.

Les coordonnées du centre des accélérations K sont données par des équations de forme connue

$$\omega^2 \xi + \omega' \eta = 0, \qquad \omega' \xi - \omega^2 \eta - \omega\sigma' = 0.$$

On voit que σ' est égal à $-2a\omega$. D'ailleurs, dans le plan P, arc SM est de la forme $4a \sin\alpha$ (α angle de AB avec ST); on a

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\omega$$

et

$$4a \sin\alpha = ct, \qquad -4a\omega\cos\alpha = c,$$

$$-4a\omega^2 \sin\alpha - 4a\omega' \cos\alpha = 0.$$

On a donc

$$\omega' = -\omega^2 \operatorname{tang}\alpha,$$

et les coordonnées de K sont

$$\xi = a \sin 2\alpha, \qquad \eta = a(1 + \cos 2\alpha);$$

le point K se confond avec M.

II. Masse du mobile 1 ; P, pression sur C, fait avec les axes les angles α, $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2}$. Donc

(1) $$\frac{d^2 x}{dt^2} = -P\cos\alpha,$$

(2) $$\frac{d^2 y}{dt^2} = -P\sin\alpha,$$

(3) $$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g,$$

les axes étant choisis convenablement. La pression étant perpendiculaire à la vitesse,

(4) $$\cos\alpha \frac{dx}{dt} + \sin\alpha \frac{dy}{dt} = 0,$$

d'où, en combinant (1) et (2),

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \qquad \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = 2gh.$$

(3) donne

$$\frac{dz^2}{dt^2} = 2g(h - z);$$

éliminant dt^2,

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dz^2} = \frac{h}{h - z}.$$

En coordonnées cylindriques u, ψ et z, comme ici $z = u$,

$$\frac{du^2 + u^2 d\psi^2}{du^2} = \frac{h}{h - u},$$

$$d\psi = -\frac{du}{\sqrt{hu - u^2}}, \qquad u = \frac{h}{2}\left(1 + \cos\psi\right);$$

C se projette suivant une cardioïde.

(3) donne aussi

$$u = z = h - \frac{1}{2} g t^2.$$

Maintenant $x = u\cos\psi$ donne

$$\frac{dx}{dt} = \frac{h}{2}(-\sin\psi - \sin^2\psi)\frac{d\psi}{dt};$$

de même, $y = u\sin\psi$,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{h}{2}(\cos\psi - \cos^2\psi)\frac{d\psi}{dt};$$

et (4) devient, en divisant par $\frac{h}{2}\cos\frac{\psi}{2}\frac{d\psi}{dt}$,

$$\sin\left(\alpha - \frac{3\psi}{2}\right) = 0, \qquad \alpha = \frac{3\psi}{2};$$

P fait l'angle $\frac{\psi}{2}$ avec la perpendiculaire à OZ.

Enfin, en différentiant l'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$,

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} - z\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} - \frac{dz^2}{dt^2} = 0;$$

remplaçant $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$ par les valeurs (1), (2); $\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}$ et $\frac{dz^2}{dt^2}$ par $2gh$ et $2g(h-z)$,

$$-P(x\cos\alpha+y\sin\alpha)+gz+2gh-2g(h-z)=0;$$

$$Pu\cos(\alpha-\psi)=3gz,\qquad P=\frac{3g}{\cos\frac{1}{2}\psi}.$$

P est infini au sommet du cône.

Épreuve pratique. — *En un point de l'équateur, on observe une étoile dont l'ascension droite est* $6^h40^m26^s,8$ *et la déclinaison* $16°34'5'',1$; *l'étoile est à l'est de l'observateur et à* $32°12'20'',5$ *du zénith. Calculer l'heure sidérale.* (Rép. : $4^h48^m22^s$.)

CORRESPONDANCE.

M. *M.* (*Paris*). — Voici comment on peut résoudre géométriquement la première partie de la question 1498 [1].

On donne deux droites fixes passant par un point C *et une droite* AB *de longueur constante glisse sur ces deux droites. Démontrer que le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle* ABC *est une ellipse.*

(Weill.)

On sait que, quelle que soit la position de AB, le cercle circonscrit au triangle ABC a un rayon de gran-

---

[1] *Voir* p. 400, 1884, et p. 390, 1896.

deur constante et que son centre O est sur un cercle de centre C. Abaissons de B une perpendiculaire sur CA. Le symétrique, par rapport à CA, du point D où elle coupe le cercle circonscrit à ABC est l'orthocentre H du triangle ABC. Puisque l'angle CBD est de grandeur constante quelle que soit la position de B, et que le cercle circonscrit reste aussi de grandeur constante, les cordes telles que CD sont égales. Comme CH = CD, on voit déjà que *le lieu de* H *est un cercle de centre* C.

Le centre E du cercle des neuf points est le milieu du segment OH. Ce segment a ses extrémités sur les cercles décrits par O et H et, comme les droites CO, CH sont également inclinées sur les bissectrices des angles formés par les droites données, on peut tout de suite conclure [1] que *le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle* ABC *est une ellipse qui a pour normale en* E *la droite* OH, *dont le grand axe est égal à la somme des segments* CO, CH, *dont le petit axe est égal à la différence de ces segments, ces axes étant dirigés suivant les bissectrices des angles formés par les droites données*.

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons de Géométrie analytique, par MM. *C. Briot* et *J.-C. Bouquet*. Nouvelle édition, revue et annotée par M. *Appell*, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences. 1 vol. in-8° de 784 pages. Paris, Ch. Delagrave. Prix : 8fr,75.

---

[1] Mannheim, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 62.

Tous ceux qui ont passé par une classe de Mathématiques spéciales connaissent les *Leçons de Géométrie analytique* de MM. Briot et Bouquet. Pendant de longues années, elles ont été la source unique à laquelle venaient puiser les professeurs et les élèves. Mais, à la suite de changements apportés aux programmes des écoles et de l'introduction de nouvelles méthodes dans l'enseignement, elles présentaient quelques lacunes et étaient, en conséquence, un peu délaissées des uns et des autres. Dans la récente édition de ces *Leçons*, que nous signalons aujourd'hui aux lecteurs des *Nouvelles Annales*, ces lacunes ont été heureusement comblées par M. Appell, professeur à la Faculté des Sciences de Paris et élève de MM. Briot et Bouquet.

S'inspirant des leçons de ses anciens maîtres, M. Appell a conservé à leur Ouvrage le caractère de simplicité et de précision que leur avaient donné ses savants auteurs. Le Livre est donc élémentaire par les méthodes et l'ordre suivi. Mais il donne des idées nettes, avec exemples, sur des questions élevées, dont voici l'énumération :

Coordonnées homogènes, trilinéaires et tangentielles;

Invariants simultanés de deux coniques; points d'inflexion d'une courbe plane, hessienne et formules de Plücker (ces dernières sans démonstration); courbes unicursales; invariants dans les surfaces du deuxième ordre; signification du signe du discriminant; courbes gauches du troisième et du quatrième ordre; complexes de droites.

L'ordre d'exposition consistant à passer du simple au plus difficile, adopté par MM. Briot et Bouquet, et qui est d'accord avec le nouveau programme d'admission à l'École Polytechnique, a été respecté. Nous ne nous arrêterons pas à discuter les avantages qu'il peut y avoir à placer la théorie des coniques avant celle des courbes d'ordre quelconque, ou à faire l'inverse; nous nous bornerons à signaler le parfait enchaînement des idées et la perfection de la forme, grâce auxquels la lecture de ce Livre est aussi aisée aux commençants qu'utile à ceux qui sont déjà rompus aux méthodes de la Géométrie analytique. M. Appell s'est du reste attaché à mettre en évidence l'idée principale de chaque question, sans s'égarer dans des détails qui font perdre de vue ce qu'elle a de plus essentiel, qui ne sont d'aucun profit pour ceux qui ont déjà acquis l'expérience de la Géométrie analytique, et qui sont de na-

ture à troubler singulièrement les élèves inexpérimentés.

En résumé, les nouvelles *Leçons de Géométrie analytique* de MM. Briot et Bouquet nous paraissent appelées à parcourir une carrière au moins aussi vaste que les anciennes, et nous ne connaissons pas de guide plus sûr pour les candidats aux Écoles, pour les étudiants des Facultés des Sciences et pour les candidats à l'Agrégation. X. A.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

E. Bortolotti. — Sui determinanti di funzioni nel calcolo alle differenze finite (Extr. des *Rend. della R. Acc. dei Lincei*). Rome, 1896.

E. Bortolotti. — La forma aggiunta di una forma lineare alle differenze (Extr. des *Rend. della R. Acc. dei Lincei*). Rome, 1896.

Angelio Gugliuzo Fazio. — Sui multipli dei numeri della forma $10Q + R$, con $R = 1, 3, 7, 9$, e sopra una operazione di divisibilità. Palermo, Alberto Reber, 1897.

Atti della Reale Accademia dei Lincei, année CCXCIII. Rome, 1896.

Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, 5e série, t. V. Rome, 1896.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Amsterdam, 1896.

Rendiconti del circolo matematico di Palermo ; 1896.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam, t. IV, 2e partie, 1896 ; t. V, 2e partie, 1897.

Dr George Owen Squier. — Experimental determination of the motion of projectiles inside the bore of a gun with the polarizing photo-chronograph. Fort Monroë, Virginie, 1896.

The educational Times, vol. XLIX. Londres, 1896.

Bulletin des Sciences mathématiques, rédigé par MM. *G. Darboux* et *J. Tannery*; 3e série, t. I. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896.

Revue de Mathématiques spéciales, rédigée par MM. *E. Humbert* et *G. Papelier*; 7e année. Paris, Nony, 1896.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par M. *H. Vuibert*; 21e année. Paris, Nony, 1896.

Lucien Lévy. — Sur les systèmes de surfaces triplement orthogonaux. Extrait des *Mémoires couronnés et Mémoires des Savants étrangers*, publiés par l'Académie royale des Sciences, des Lettres

et des Beaux-Arts de Belgique; t. LIV; in-4°, 92 p. Hayez, Bruxelles, 1896.

Arnaudeau. — Spécimen de Tables de triangulaires. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896.

Eugène Rouché et *Ch. de Comberousse.* — Leçons de Géométrie à l'usage des élèves de l'Enseignement moderne. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896.

Eugène Rouché et *Ch. de Comberousse.* — Solutions détaillées des exercices et problèmes énoncés dans les Leçons de Géométrie à l'usage des élèves de l'enseignement moderne. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896.

F. Tisserand. — Recueil complémentaire d'exercices sur le Calcul infinitésimal; 2e édition, augmentée de nouveaux exercices sur les variables imaginaires, par M. *P. Painlevé,* professeur-adjoint à la Faculté des Sciences de Paris. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1896.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1542.

(1885, p. 392.)

Étant donnés deux plans fixes, on considère deux sphères de même rayon, tangentes entre elles, et touchant chacune un des deux plans.

Le point commun de l'une des deux sphères avec le plan correspondant étant donné, on demande le lieu du point commun aux deux sphères lorsque l'on fait varier leur rayon. (Geneix-Martin.)

SOLUTION

Par M. A. Thévenet,

Élève à l'École Lacordaire.

Soit M le point de contact donné.

La sphère S, tangente à Q au point M, a son centre sur la normale $M\Delta$.

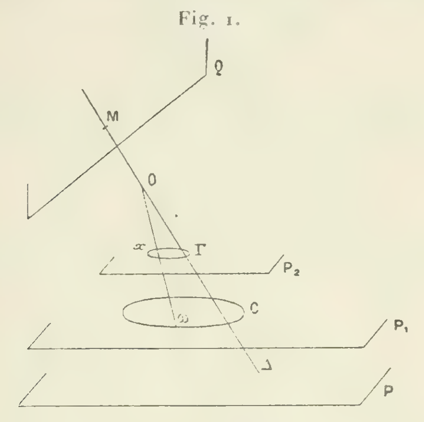
Je me fixe un rayon

$$R = MO,$$

O sera alors le centre de la sphère S, qui a pour rayon R

Le centre de la sphère Σ, tangente à P, sera dans un plan P_1

Fig. 1.



dont la distance à P sera précisément R. Or, les deux sphères S et Σ étant tangentes, la distance de leurs centres est $2R$. Si donc du point O comme centre je décris la sphère de rayon $2R$, elle coupe le plan P_1 suivant un petit cercle C, qui sera le lieu du centre de Σ pour la valeur donnée de R.

Et le lieu du point de contact pour cette valeur sera le cercle section du cône OC par le plan P_2 équidistant de O et de P_1.

Je vois donc déjà que le lieu cherché est une surface du deuxième degré, dont une direction de plans cycliques est P.

Cherchons si cette surface a des ombilics réels.

Pour que le cercle Γ ait un rayon nul, il faut que le cercle C ait aussi un rayon nul. La sphère décrite de O, avec $2R$ pour rayon, doit donc être tangente au plan P_1.

La distance de O au plan P sera alors $3R$.

Considérons le plan mené par $M\Delta$ perpendiculairement à P. Soit i la trace de $M\Delta$ sur P.

Je dois avoir

$$\frac{MO}{Og} = \frac{1}{3}.$$

Or

$$\frac{Oi}{Mi} = \frac{Mi - MO}{Mi} = \frac{Og}{MK}.$$

Je dois donc avoir

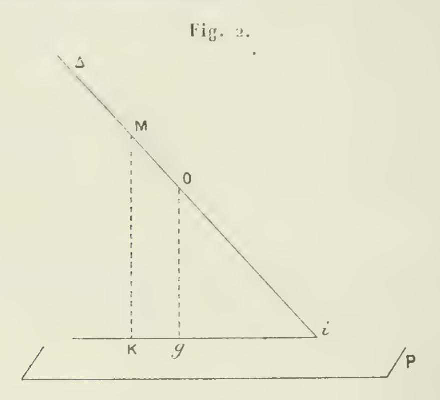
$$\frac{Mi - MO}{Mi} = \frac{3MO}{MK},$$

d'où

$$\overline{\mathrm{MO}} = \frac{\overline{\mathrm{M}i}.\,\overline{\mathrm{MK}}}{3\,\overline{\mathrm{M}i} + \overline{\mathrm{MK}}},$$

longueur que je puis construire. J'ai ainsi un ombilic de la surface. J'en aurai un autre de la même manière, en prenant un centre de S au-dessus de M.

Fig. 2.



J'ai donc deux ombilics réels. Mais les plans, parallèles aux plans tangents en ces ombilics et situés entre eux, donnent des sections imaginaires, car il est évident que si je prends MO très petit, la sphère de rayon 2R, décrite de O, ne coupera plus le plan P_1 correspondant.

La surface lieu est donc un hyperboloïde à deux nappes.

J'en ai deux ombilics, donc le centre; et j'en ai un point quelconque par la méthode indiquée.

SOLUTION ANALYTIQUE.

Soit pris le point de contact fixe pour origine des coordonnées, et pour plan $z = 0$ le plan correspondant.

L'équation de la sphère S qui le touche est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda z = 0.$$

Soit

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + d = 0$$

l'équation du deuxième plan.

Le centre de la deuxième sphère S est un point α, β, γ qui,

à cause de l'égalité des deux sphères, vérifie la relation

$$(1) \qquad \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \lambda.$$

Ce point se trouve aussi sur la sphère décrite du centre de S avec un rayon double de celui de S. On a donc

$$(2) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + (\gamma - \lambda)^2 = 4\lambda^2.$$

Le point O, milieu du segment déterminé par les centres de S et de S′, est un point du lieu. Soient X, Y, Z ses coordonnées. On a

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{\alpha}{2}, \\ Y &= \frac{\beta}{2}, \\ Z &= \frac{\gamma + \lambda}{2}. \end{aligned} \right.$$

Pour avoir le lieu, j'élimine α, β, γ, λ, entre les relations (1), (2) et (3). Pour cela, remplaçant, dans (1) et (2), α, β, γ par leurs valeurs tirées de (3), j'ai

$$(1') \qquad \frac{2AX + 2BY + C(2Z - \lambda) + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \lambda,$$

$$(2') \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\lambda Z = 0.$$

Cette dernière relation exprime que le point X, Y, Z du lieu est sur la sphère S.

L'élimination de λ entre (1′) et (2′) donne le lieu

$$\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2Z} = \frac{2(AX + BY + CZ) + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + C}.$$

Ordonnons cette équation. Elle devient

$$\begin{aligned} &\left[\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + C\right](X^2 + Y^2) \\ &\quad + \left[\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} - 3C\right] Z^2 - 4AXZ - 4BYZ - 4DZ = 0. \end{aligned}$$

1° Cette surface, qui est du deuxième ordre, admet la direction des plans

$$Z = k$$

comme direction cyclique. En particulier, le plan

$$z = 0$$

la coupe suivant un cercle de rayon nul.

2° Il est facile de vérifier que la direction du plan

$$AX + BY + CZ = 0$$

est aussi circulaire; car elle donne

$$AX + BY = -CZ,$$

et l'équation de la surface devient, quand j'ai remplacé $(AX + BY)$ par $-CZ$:

$$(X^2 - Y^2 + Z^2)(\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + C) - 4DZ = 0,$$

ce qui montre que l'intersection du plan et de la surface est la même que celle d'une sphère et de ce plan.

3° On aurait aisément les coordonnées du centre.

4° On pourrait discuter la surface, en considérant les plans

$$AX + BY + CZ = h.$$

Soient h', h'' les valeurs de h donnant des ombilics; on donnerait alors à h une valeur h_0 comprise entre h' et h'', et l'on verrait que le plan

$$AX + BY + CZ = h_0$$

donne une section imaginaire; ce qui montrerait que la surface est un hyperboloïde à deux nappes.

Mais le calcul serait long; et il semble que le plus simple soit encore de recourir à l'équation en S, laquelle donne assez rapidement le résultat.

Question 1557.

(1885, p. 576.)

Par un point M, *pris d'une manière quelconque sur le côté* BC *du triangle* ABC, *on mène des parallèles aux côtés* AC, AB.

Ces droites coupent respectivement aux points B′, C′ *les côtés* AB *et* AC. *Démontrer que, si la droite qui joint le*

sommet A *au point* I *de rencontre des droites* B′C *et* BC′ *coupe la droite* B′C′ *au point* M′, *on a*

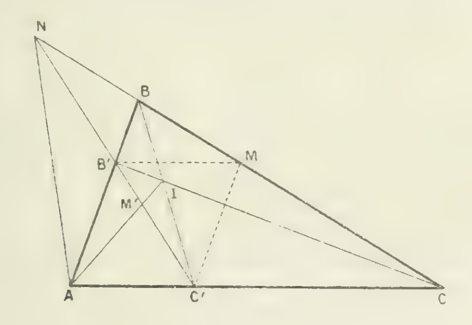
$$\frac{M'B'}{M'C'} = \frac{MB}{MC}.$$

(D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. H. LEZ.

Dans le quadrilatère AB′IC′, prolongeant la diagonale B′C jusqu'à sa rencontre avec la diagonale extérieure BC, et joignant le point de rencontre N au sommet A, les quatre droites



NA, BA, IA et CA formeront un faisceau harmonique, ce qui permettra d'écrire, au signe près,

$$\frac{M'B'}{M'C'} = \frac{NB'}{NC'}.$$

Mais, par construction, B′M étant parallèle à AC, les triangles semblables NB′M, NC′C donneront

$$\frac{NB'}{NC'} = \frac{MB'}{CC'};$$

de même, les triangles semblables BMB′, MCC′ donnent aussi

$$\frac{MB'}{CC'} = \frac{MB}{MC}.$$

Donc

$$\frac{M'B'}{M'C'} = \frac{MB}{MC}.$$

C. Q. F. D.

QUESTIONS.

1756. Diviser un cercle, de rayon donné, en trois parties équivalentes et inégales formées par des arcs de cercles.

(ÉMINE.)

1757. Des paraboles ont un contact du second ordre avec une courbe plane donnée en un même point de cette courbe; quelle est l'enveloppe de leurs axes? Déterminer, pour l'un de ces axes, le point où il touche cette enveloppe et construire le centre de courbure de cette courbe correspondant à ce point de contact? (MANNHEIM.)

1758. Si quatre points d'une droite sont assujettis à rester sur des sphères ayant leurs centres sur un même plan P, tout point de la droite décrit une courbe située sur une sphère ayant son centre dans ce plan P. (A. PELLET.)

1759. Dans le déplacement d'une figure de forme invariable, les plans normaux aux enveloppes de tous les plans parallèles à une droite de la figure mobile passent, à un moment donné, par une même droite parallèle à l'axe central.

(A. PELLET.)

ERRATA.

Tome XV, 1896; question 1747, *au lieu de* De l'identité (1) correspondante déduire qu'on peut, d'une infinité de manières, satisfaire à l'identité suivante...., *lisez* L'identité (1) correspondante est une des solutions de l'identité suivante, à laquelle on peut satisfaire d'une infinité de manières.... (GILBERT.)

Page 410, ligne 12, *au lieu de* $\tang \omega$, *lisez* $\tang t\omega$.

Page 413, ligne 4 en remontant, *au lieu de* φ_n, *lisez*

$$\varphi_n(x-x_0, y-y_0, z-z_0).$$

Page 418, ligne 14, *au lieu de* λ, *lisez* 8λ.

[A3k]

CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1896;

PAR M. R. GILBERT [1].

Soit F(x) *un polynome du quatrième degré, dont les quatre racines* a, b, c, d *sont distinctes; on divise le carré de la dérivée par* F(x). *Si l'on désigne par* Q *et* R *le quotient et le reste de cette division, on a*

$$F'^2(x) = F(x)Q + R.$$

1° *Prouver que* Q *est un carré parfait;*

2° *Prouver que le polynome*

$$F(x) + \rho R(x)$$

est carré parfait pour trois valeurs différentes de ρ.

3° *Trouver tous les polynomes du quatrième degré* G(x) *qui sont tels que le polynome*

$$F(x) + \rho G(x)$$

soit carré parfait pour trois valeurs distinctes de ρ.

4° *En général, le reste* R *est du troisième degré; pour qu'il s'abaisse au second, il faut et il suffit que la condition suivante soit remplie :*

$$F'(a) + F'(b) + F'(c) + F'(d) = 0.$$

Le reste R *est alors carré parfait; il ne diffère de* Q *que par un facteur constant.*

Montrer que ce cas est caractérisé par ce fait que l'addition à F(x) *d'une constante convenable rend*

[1] Mémoire ayant obtenu le prix.

le polynome carré parfait. La réciproque est-elle vraie?

Dans ce cas, les paragraphes 2° et 3° subissent-ils quelque modification?

1. Soit

$$F(x) = a_0(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$
$$= a_0x^4 - 4a_1x^3 + 6a_2x^2 - 4a_3x + a_4$$

un polynome du quatrième degré dont les quatre racines a, b, c, d sont distinctes. On divise le carré de la dérivée par $F(x)$; soit Q le quotient, R le reste; on a

$$F'^2(x) = F(x)Q(x) + R(x).$$

Cherchons s'il est possible de déterminer ρ tel que $F + \rho R$ soit carré parfait. Posons

$$F + \rho R = \rho P^2,$$

P étant un polynome en x du second degré.

Le système des deux équations précédentes est équivalent au suivant :

$$\begin{cases} F'^2 = FQ + R, \\ F(\rho Q - 1) = \rho(F'^2 - P^2). \end{cases}$$

Il faut et il suffit que la seconde équation soit vérifiée identiquement. Or elle est du sixième degré; et, en tenant compte de la première, les termes de degrés six et cinq sont les mêmes dans les deux membres; il y aura donc cinq conditions; on en obtient quatre en écrivant que a, b, c, d sont des racines du second membre : ce qui conduit à l'un ou l'autre des deux systèmes :

$$\begin{cases} P(a) = F'(a), \\ P(b) = F'(b), \\ P(c) = F'(c), \\ P(d) = -F'(d), \end{cases} \qquad \begin{cases} P(a) = F'(a), \\ P(b) = F'(b), \\ P(c) = -F'(c), \\ P(d) = F'(d). \end{cases}$$

ce qui, en appliquant la formule d'interpolation de Lagrange, donne l'une ou l'autre des deux valeurs de $P(x)$:

$$P(x) = F(x)\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \frac{1}{x-d}\right),$$

$$P(x) = F(x)\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c} - \frac{1}{x-d}\right).$$

La première donne pour P un polynome du troisième degré. Reste donc la seconde

$$P(x) = a_0[x^2(c+d-a-b)+\ldots].$$

On obtiendra la cinquième condition en identifiant les termes de plus haut degré dans $F + \rho R = \rho P^2$; ce qui donne

$$\rho = \frac{1}{(a+b-c-d)^2},$$

et l'on voit ainsi qu'il y a trois valeurs de ρ rendant $F + \rho R$ carré parfait.

2. Proposons-nous maintenant le problème plus général de trouver tous les polynomes $G(x)$ du quatrième degré tels que $F + \rho G$ soit carré parfait pour trois valeurs de ρ. Ce problème a des solutions, puisque nous venons d'en trouver une.

Observons d'abord que les coefficients de $R(x)$ rendus entiers sont des fonctions du troisième degré de a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, de sorte que

$$a_0 R(x) = b_0 x^3 + 3 b_1 x^2 + 3 b_2 x + b_3.$$

Ce polynome $R(x)$ peut se mettre sous une autre forme. Faisons $x = a$ dans l'équation $F'^2 = FQ + R$, on a

$$R(a) = F'^2(a).$$

d'où, par la formule d'interpolation de Lagrange,

$$R(x) = F(x)\left[\frac{F'(a)}{x-a} + \frac{F'(b)}{x-b} + \frac{F'(c)}{x-c} + \frac{F'(d)}{x-d}\right]$$
$$= F(x)\left[\sum \frac{F'(a)}{x-a}\right].$$

On en tire

$$b_0 = a_0^2[\Sigma F'(a)].$$

En général, le reste $R(x)$ est du troisième degré; pour qu'il s'abaisse au second, il faut et il suffit que

$$\Sigma F'(a) = 0.$$

Remarquons que, si cette condition s'exprime en fonction entière des coefficients de $F(x)$, l'équation obtenue ne renferme pas a_4; en outre, il n'y a qu'un terme en a_3 de la forme $K a_0^2 a_3$, car le premier membre de l'équation précédente est de poids trois (K est un nombre).

Cela étant, pour que $F(x)$ soit carré parfait, il faut et il suffit visiblement que $R(x)$ soit identiquement nul. Mais les conditions pour qu'il en soit ainsi doivent se réduire à deux *a priori;* et si ces conditions s'expriment en fonction de a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ce dernier élément a_4 doit entrer dans l'une des conditions, car sinon, $F(x)$ étant carré parfait, $F(x) + K$ le serait aussi, quel que soit K. Ces deux conditions seront :

1° $\Sigma F'(a) = 0$; soit $M = 0$ cette équation;

2° Une condition renfermant a_4; soit $N = 0$ cette équation.

De là suit que Q est carré parfait, car ses coefficients ne dépendent que de a_0, a_1, a_2; si donc l'on dispose de a_3, a_4 (et c'est possible d'après ce qui précède), de façon que $M = 0$, $N = 0$, Q ne change pas; mais dans ce cas il est visible que $Q = \frac{F'^2}{F}$ est carré parfait.

3. Revenons aux polynomes $G(x)$. Divisons G'^2 par G; soit S le reste et posons

$$\left\{\begin{array}{l} G = g_0 x^4 + 4 g_1 x^3 + 6 g_2 x^2 + 4 g_3 x + g_4, \\ g_0 S = h_0 x^3 + 3 h_1 x^2 + 3 h_2 x + h_3. \end{array}\right.$$

Si $F + \rho G$ est carré parfait, le reste R, relatif à $F + \rho G$, est identiquement nul; si donc nous désignons par $b_p(\rho)$ ce que devient le coefficient b_p quand on remplace F par $F + \rho G$, les quatre équations suivantes doivent être simultanément satisfaites pour une même valeur de ρ :

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} b_0(\rho) = b_0 + c_0 \rho + d_0 \rho^2 + h_0 \rho^3 = 0, \\ b_1(\rho) = b_1 + c_1 \rho + d_1 \rho^2 + h_1 \rho^3 = 0, \\ b_2(\rho) = b_2 + c_2 \rho + d_2 \rho^2 + h_2 \rho^3 = 0, \\ b_3(\rho) = b_3 + c_3 \rho + d_3 \rho^2 + h_3 \rho^3 = 0; \end{array}\right.$$

car les coefficients b sont évidemment du troisième degré en fonction de ceux de $F(x)$.

A chaque valeur de ρ, rendant $F + \rho G$ carré parfait, correspond une racine commune à ces équations; ce qui montre qu'il ne peut pas y avoir plus de trois valeurs de ρ, car on aurait $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$; $F(x)$ serait carré parfait et ses racines non distinctes comme on l'a supposé. Pour qu'il y ait trois valeurs de ρ rendant $F + \rho G$ carré parfait, il faut que les équations (1) aient les mêmes racines.

Donc, en particulier, on aura

$$\frac{b_0}{h_0} = \frac{b_1}{h_1} = \frac{b_2}{h_2} = \frac{b_3}{h_3}.$$

Cela exprime que les restes R, S sont les mêmes, à un facteur près.

On peut donc poser

$$S = 16 \beta a_0 R.$$

D'autre part, $Q(x)$ étant carré parfait, si l'on identifie les premiers termes de $F'^2 = FQ + R$, on trouve

$$Q = 16 a_0 \left(x + \frac{a_1}{a_0}\right)^2.$$

Donc on est conduit à trouver un polynome $G(x)$, tel que

$$G'^2 = 16 g_0 \left(x - \frac{g_1}{g_0}\right)^2 \times G + 16\beta a_0 R.$$

Dans cette égalité, R seul est donné; on pourrait identifier les deux membres et obtenir g_0, g_1, g_2, g_3, g_4 en fonction de deux variables; mais le calcul serait plus pénible que de la façon suivante :

Posons $g_1 = g_0 \alpha$ et faisons le changement de variable

$$x + \alpha = y;$$

de sorte que $G(x)$ et $R(x)$ deviennent deux polynomes en y, que nous désignerons par $U(y)$ et $T(y)$

$$\begin{cases} U(y) = u_0 y^4 + 6 u_2 y^2 + 4 u_3 y + u_4, \qquad (u_0 = g_0), \\ T(y) = b_0 y^3 + 3(b_1 - b_0 \alpha) y^2 \\ \qquad + 3(b_2 - 2 b_1 \alpha + b_0 \alpha^2) y + b_3 - 3 b_2 \alpha + 3 b_1 \alpha^2 - b_0 \alpha^3, \end{cases}$$

et l'on a l'équation

$$U'^2 = 16 u_0 y^2 U - 16\beta T.$$

Identifions maintenant les deux membres de cette équation; on trouve, pour déterminer u_0, u_2, u_3, u_4, le système

$$\begin{cases} 2 u_0 u_3 - 4 u_0 u_3 = \beta B_0, \\ 9 u_2^2 - u_0 u_4 = 3\beta (b_1 - \alpha b_0), \\ 6 u_2 u_3 = 3\beta (b_2 - 2\alpha b_1 - \alpha^2 b_0), \\ u_3^2 = \beta (b_3 - 3\alpha b_2 + 3\alpha^2 b_1 - \alpha^3 b_0). \end{cases}$$

On tire immédiatement de là des quantités propor

tionnelles à u_0, u_2, u_3, u_4 :

$$\frac{u_0}{b_0^2} = \frac{u_2}{-(b_2 - 2\alpha b_1 + \alpha^2 b_0)b_0}$$
$$= \frac{u_3}{2(b_3 - 3b_2\alpha + 3b_1\alpha^2 - b_0\alpha^3)b_0}$$
$$= \frac{u_4}{9(b_2 - 2\alpha b_1 + \alpha^2 b_0)^2 - 12(b_3 - 3\alpha b_2 + 3\alpha^2 b_1 - \alpha^3 b_0)(b_1 - \alpha b_0)}.$$

Égalons à λ la valeur commune de ces rapports ; remplaçons ensuite les u dans U, puis remplaçons y par $x + \alpha$ et réduisons ; on obtient, en définitive, le polynome G sous la forme

$$\begin{aligned} G = \lambda [& b_0^2 x^4 + 4 b_0^2 \alpha x^3 + 6 b_0 (2 b_1 \alpha - b_2) x^2 \\ & + 4 b_0 (3\alpha b_2 - 2 b_3) x + 4 b_0 b_3 \alpha + 9 b_2^2 - 12 b_1 b_3]. \end{aligned}$$

Posons enfin

$$\lambda\alpha = \mu,$$

puis

$$G_1 = b_0^2 x^4 - 6 b_0 b_1 x^2 - 8 b_0 b_3 x + 9 b_2^2 - 12 b_1 b_3 ;$$

on a

$$G = \lambda G_1 + 4\mu a_0 b_0 R.$$

C'est la solution du problème. En effet, l'équation générale des polynomes G ne peut être que de cette forme, qui renferme deux paramètres arbitraires λ, μ. Or, *a priori*, l'équation générale des polynomes cherchés renferme deux paramètres arbitraires, leur définition les assujettissant à trois conditions ; c'est donc là l'équation générale des polynomes cherchés.

4. Nous allons maintenant examiner un cas particulier intéressant.

On a vu que R, qui est généralement du troisième degré, est du second degré lorsque $\Sigma F'(a) = 0$. Nous allons montrer que ce cas est caractérisé par la propriété

suivante : Si l'on ajoute à $F(x)$ une constante convenable K, on a un carré parfait.

En effet, divisons par $F + K$ le carré de sa dérivée F'^2 ; soit Q_1 le quotient, R_1 le reste, on a

$$F'^2 = (F + K)Q_1 + R_1,$$

ou

$$FQ + R = (F + K)Q_1 + R_1,$$

ou

$$F(Q - Q_1) = KQ_1 + R_1 - R.$$

Or, F étant du quatrième degré et le second membre du troisième,

$$Q - Q_1 = 0,$$
$$KQ_1 + R_1 - R = 0.$$

Cela étant : si R est du second degré, il en est de même de R_1 ; si, de plus, l'on dispose de K de façon à annuler les trois autres termes de $KQ_1 - R = KQ - R$, R_1 est identiquement nul ; les trois équations en K ainsi obtenues sont compatibles ; en effet, dire que R_1 est nul, c'est dire que $F + K$ est carré parfait. On a vu plus haut qu'il y a deux conditions pour qu'il en soit ainsi, à savoir : 1° R_1 est du second degré ; 2° une autre condition renfermant K. Les trois équations en K se réduisent donc à une seule et K est déterminé par une équation du premier degré.

Cette équation est $R = KQ$: on voit donc que R est carré parfait et ne diffère de Q que par un facteur constant.

Réciproquement, si $F + K$ est carré parfait, R_1 est nul et l'on a

$$\begin{cases} Q - Q_1 = 0, \\ KQ_1 - R = 0 ; \end{cases}$$

ce qui montre que R est du second degré.

Ces propriétés se vérifient sur l'équation générale des polynomes G; en effet, dans ce cas, on a $b_0 = 0$, et, comme R est carré parfait, on a aussi $9 b_2^2 - 12 b_1 b_3 = 0$; donc G_1 est nul, mais on peut faire λ et μ infinis et en disposer de telle sorte que

$$\begin{cases} \lambda b_0 = -\theta, \\ \mu b_0 = \eta, \end{cases}$$

θ et η étant deux paramètres arbitraires finis, non nuls.

Si l'on pose

$$G_2 = -6 b_2 x^2 - 8 b_3 x + \frac{1}{b_0}(9 b_2^2 - 12 b_1 b_3),$$

$$G = \theta G_2 + 4 a_0 \eta R.$$

Mais de $9 b_2^2 - 12 b_1 b_3 = 0$ on déduit $\frac{6 b_2}{3 b_1} = \frac{8 b_3}{3 b_2}$; donc G_2 et R ont leurs premiers coefficients proportionnels; quant à l'expression $\frac{9 b_2^2 - 12 b_1 b_3}{b_0}$, elle a une valeur indéterminée lorsque b_0 s'annule; car, s'il en était autrement, c'est que l'on aurait, lorsque b_0 tend vers zéro, une relation entre $9 b_2^2 - 12 b_1 b_3$ et b_0, c'est-à-dire une relation entre les coefficients de R. Or, cela n'est pas possible, car alors se donner R, ce ne serait se donner que trois relations entre les coefficients de F; se donner R_1, à un facteur constant près, ne donnerait que deux relations et F dépendrait de trois paramètres arbitraires; mais c'est ainsi que nous avons précisément trouvé G, et nous avons vu qu'il ne peut dépendre que de deux paramètres arbitraires λ, μ; donc, enfin, $\frac{9 b_2^2 - 12 b_1 b_3}{b_0}$ a une valeur quelconque et, en définitive, on peut écrire

$$G = \sigma R + \tau.$$

σ et τ étant deux paramètres arbitraires.

On peut donc disposer de ρ de telle sorte que $F + \rho\tau$ soit carré parfait.

5. Il semblerait, de la façon dont on a déduit les polynomes $G = \sigma R + \tau$ du cas général où b_0 n'est pas nul, que ces polynomes sont tels que $F + \rho G$ est carré parfait pour trois valeurs de ρ. Nous allons faire voir qu'il n'en est rien et qu'en général $F + \rho G$ n'est carré parfait que pour deux valeurs de ρ.

Effectivement, dans le cas particulier qui nous occupe, on a

$$G = \sigma(3b_1x^2 + 3b_2x + b_3) + \tau,$$

$$G' = 3\sigma(2b_1x - b_2),$$

et

$$S = G'^2 = 9\sigma^2(2b_1x + b_2)^2,$$

et comme

$$g_0 S = h_0x^3 - 3h_1x^2 - 3h_2x - h_3,$$

on en déduit que g_0 étant nul, h_0, h_1, h_2, h_3 sont nuls, et que les équations du système (1) ont une racine en ρ infinie. Or, pour ρ infini, $F + \rho G$ se réduit à G, qui, en général (σ et τ étant quelconques), n'est pas carré parfait.

Ce serait faire un faux raisonnement, de déduire que G est carré parfait de ce que les équations (1) ont une racine commune infinie; car, pour montrer que tous les polynomes G de la forme $\lambda G_1 + 4\mu a_0 b_0 R$ sont bien tels que $F + \rho G$ est carré parfait pour trois valeurs de ρ, nous avons supposé que l'équation générale de ces polynomes ne dépendait que de deux paramètres arbitraires, c'est-à-dire précisément que l'équation qui donne les valeurs de ρ était du troisième degré; or, ici, cette hypothèse est fausse, car toutes les équations (1) (sauf la première, qui disparaît identiquement) sont réduites au second degré.

Remarque. — La première des équations (1) disparaît identiquement; en effet, b_0 étant nul, et b_1 b_2, b_3 ne l'étant pas, sans quoi F sera carré parfait, les équations autres que la première ne peuvent avoir zéro pour racine. La première, qui admet zéro pour racine, disparaît donc.

Il résulte donc de là que, si $b_0 = 0$, les polynomes $G = \sigma R + \tau$ ne sont, en général (sauf les cas particuliers $\sigma = 0$, $\tau = 0$) pas carrés parfaits, et que, pour deux valeurs de ρ seulement, $F + \rho G$ est carré parfait.

Nous ne nous proposerons pas de trouver l'équation générale des polynomes satisfaisant à ces deux conditions. Nous terminerons par une interprétation de l'équation $b_0 = 0$ relativement aux racines de l'équation $F(x) = 0$.

6. On a vu que les valeurs de ρ rendant carré parfait $F + \rho R$ sont les valeurs de l'expression $\frac{1}{(a+b-c-d)^2}$. Donc, pour $b_0 = 0$, la somme de deux racines est égale à celle des deux autres. La réciproque est vraie.

En effet, on a

$$F'(x) = a_0 \Sigma (x-b)(x-c)(x-d),$$
$$F'(a) = a_0 \Sigma (a-b)(a-c)(a-d).$$

De $a + b = c + d$ on déduit

$$\begin{cases} a - c = d - b, \\ a - d = c - b, \end{cases}$$

par suite

$$-(a-b)(a-c)(a-d) = (b-c)(b-d)(b-a).$$

Donc, si la somme de deux racines est égale à celle des deux autres, on a

$$\Sigma F'(a) = 0.$$

et, par suite,

$$b_0 = 0.$$

D'ailleurs, le produit

$$(a + b - c - d)(a + c - b - d)(a + d - b - c)$$

est une fonction symétrique de a, b, c, d; donc, exprimé en fonction de a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, il sera de poids trois; comme $\Sigma F'(a)$ est aussi de poids trois, leur quotient est fonction de a_0 seul. Pour le calculer, il suffit de considérer une équation particulière $a_0 x^4 - a_0 x^3 = 0$, par exemple; on trouve ainsi

$$\Sigma F'(a) = a_0(a + b - c - d)(a + c - b - d)(a + d - b - c).$$

CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS, A ZURICH, EN 1897.

Le Comité vient d'adresser l'appel suivant, que nous sommes heureux de pouvoir reproduire, aux mathématiciens des diverses nations :

Monsieur,

Vous n'ignorez pas que l'idée d'un Congrès international des mathématiciens a été, dans ces derniers temps surtout, l'objet de nombreuses délibérations de la part des savants intéressés à sa réalisation. Il leur a paru, en raison des excellents résultats obtenus dans d'autres domaines scientifiques, par une entente internationale, qu'il y aurait de très sérieux avantages à assurer l'exécution de ce projet.

A la suite d'un échange de vues très actif, on tomba d'accord sur un premier point : c'est que la Suisse, par sa situation géographique centrale, par ses traditions et son expérience des Congrès internationaux, paraissait toute désignée pour tenter

un premier essai de réunion des mathématiciens. On voulut bien ensuite choisir Zurich comme siège du Congrès.

Les mathématiciens de Zurich ne se font aucune illusion sur les difficultés qu'ils auront à surmonter. Mais, dans l'intérêt même de cette entreprise, ils ont pensé ne pouvoir décliner les ouvertures si honorables qui leur ont été faites de tous côtés. Ils se décidèrent donc à prendre toutes les mesures préparatoires pour le futur Congrès et à contribuer à sa réussite dans la mesure de leurs forces. Ainsi se constitua, avec le concours de mathématiciens d'autres nations, le Comité d'organisation soussigné, chargé de *réunir à Zurich, en* 1897, *les mathématiciens du monde entier*.

Le Congrès, auquel vous êtes cordialement prié d'assister, aura lieu, à Zurich, les 9, 10 et 11 août 1897, dans les salles de l'École polytechnique fédérale. Le Comité ne manquera pas de vous communiquer, en temps opportun, le texte du programme arrêté en vous priant de lui envoyer votre adhésion. Mais, dès à présent, il est permis d'observer que les travaux scientifiques et les questions d'ordre administratif porteront essentiellement sur des sujets d'intérêt général ou d'importance reconnue.

Les Congrès scientifiques ont aussi ce précieux avantage de favoriser et d'entretenir les relations personnelles. Le Comité local ne manquera pas d'accorder toute sa sollicitude à cette partie de sa tâche et, dans ce but, il élaborera un modeste programme de fêtes et de réunions intimes.

Puissent les espérances fondées sur ce premier Congrès se réaliser pleinement! Puissent de nombreux participants contribuer par leur présence à créer, entre collègues, non seulement des rapports scientifiques suivis, mais encore des relations cordiales basées sur une connaissance personnelle. Puisse enfin notre Congrès servir à l'avancement et au progrès des Sciences mathématiques!

H. Bleuler, président du Conseil de l'École polytechnique fédérale, Zurich. H. Burkhardt, professeur à l'Université de Zurich. L. Cremona, professeur à Rome. G. Dumas, assistant à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich. J. Franel, professeur à l'École polytechnique fédérale, Zurich. C.-F. Geiser, professeur à l'École polytechnique fédérale, Zurich. A.-Co.

Greenhill, professeur à Woolwich. A. Herzog, directeur de l'École polytechnique fédérale, Zurich. G.-W. Hill, professeur à West-Nyack (U. S. A.). A. Hurwitz, professeur à l'École polytechnique fédérale, Zurich. F. Klein, professeur à Gœttingue. A. Markoff, professeur à Saint-Pétersbourg. F. Mertens, professeur à Vienne. H. Minkowski, professeur à l'École polytechnique fédérale, Zurich. G. Mittag-Leffler, professeur à Stockholm. G. Oltramare, professeur à Genève. H. Poincaré, professeur à Paris. J. Rebstein, assistant à l'École polytechnique fédérale, Zurich. F. Rudio, professeur à l'École polytechnique fédérale, Zurich. R. Vondermuhll, professeur à Bâle. F.-H. Weber, professeur à l'École polytechnique fédérale, Zurich.

Adresser les correspondances concernant les affaires du Congrès à M. le professeur Geiser, Kusnacht-Zurich.

SUR « L'ARITHMÉTIZATION » DES MATHÉMATIQUES;

Discours prononcé par M. Klein devant la Société royale des Sciences de Gœttingue (*Göttinger Nachrichten*, 1895; Cahier II).

(Traduit avec l'autorisation de M. Klein par MM. Vassilief, professeur à l'Université de Kazan et L. Laugel).

Messieurs,

Si les théories spéciales de la Science mathématique, par la nature même des choses, échappent à l'entendement de ceux qui sont étrangers à cette étude et, par suite, ne les intéressent pas, le mathématicien, néanmoins, doit essayer de signaler les points de vue généraux sous lesquels il voit le développement de sa Science,

et cela d'autant plus que ces points de vue permettent de préciser sa corrélation avec les domaines scientifiques voisins. Je voudrais aussi, en l'occasion actuelle, essayer de prendre position par rapport à cette importante direction mathématique, qui a pour principal représentant M. Weierstrass, dont nous venons de célébrer le quatre-vingtième anniversaire. Je parle de l'*Arithmétization des Mathématiques* (*Arithmetizirung*). Mais, auparavant, je dois exposer quelques éclaircissements relatifs aux origines et aux tendances de cet ordre d'idées.

On associe généralement à la définition des Mathématiques l'idée d'un système de déductions rigoureusement logique qui est pour lui-même sa propre base; nous en avons un exemple dans la *Géométrie* d'Euclide. Toute autre est la pensée qui préside à la naissance de la Mathématique moderne. Partant de l'observation de la nature, ayant pour but l'éclaircissement de ses phénomènes, cette pensée place en tête un principe philosophique, *le principe de la continuité*. C'est ce qui a lieu chez les grands promoteurs Newton et Leibnitz, et pendant le XVIIIe siècle tout entier qui est, à proprement parler, un siècle de découvertes au point de vue du développement des Mathématiques. Mais, peu à peu, renaît une critique plus rigoureuse qui demande une sanction logique des audacieuses découvertes, ainsi qu'il arrive lorsqu'un gouvernement s'établit après une époque de conquête prolongée. C'est la période de Gauss et Abel, de Cauchy et Dirichlet. Mais on n'en est pas resté là. Gauss use encore sans hésiter, comme principe de démonstration, de l'intuition de l'espace et, en particulier, de l'intuition de la continuité de l'espace. Mais une recherche plus approfondie a montré non seulement qu'il reste ainsi beaucoup à démontrer, mais encore que l'in-

tuition de l'espace a conduit d'une façon trop précipitée à admettre comme légitimes en toute généralité des propositions qui ne le sont pas. D'où *la demande d'une méthode de démonstration exclusivement arithmétique.* On ne regarde alors comme bien acquis à la Science que ce qui peut être démontré avec clarté comme identiquement exact par l'application des opérations usuelles du calcul. Un simple coup d'œil jeté sur les nouveaux Traités de Calcul différentiel et intégral fait suffisamment apercevoir les grands changements dans les méthodes. Où l'on employait autrefois les figures comme moyen de démonstration, l'on trouve aujourd'hui des considérations toujours réitérées, relatives aux grandeurs qui sont ou peuvent devenir plus petites que toute grandeur assignée, si petite qu'elle soit. Comme point de départ, nous avons alors l'examen et l'éclaircissement de ces questions : que doit-on entendre ou ne pas entendre par continuité d'une variable et quand peut-il être, en général, question de la différentiation ou de l'intégration d'une fonction? Tel est l'*habitus* mathématique de Weierstrass; c'est ce que l'on nomme brièvement, suivant l'usage habituel, *la rigueur de Weierstrass* (*die Weierstrass' sche Strenge*).

Cette rigueur, naturellement, n'a rien d'absolu; elle peut même être poussée plus loin si l'on soumet encore la dépendance mutuelle des grandeurs à des restrictions plus étroites. A ce point de vue, je citerai la tendance de Kronecker à bannir les nombres irrationnels et à ramener le traitement des problèmes de la Science mathématique à l'étude des relations entre les seuls nombres *entiers*. Je citerai encore les efforts que l'on a faits pour introduire, dans les différentes espèces de combinaisons logiques, des notations abrégées, afin d'en exclure les associations d'idées superflues, les indéter-

minations qui s'y glissent inconsciemment quand on emploie le langage habituel et qui restent ainsi sans contrôle. Un savant italien, Peano, de Turin, à qui nous devons déjà d'intéressantes études sur d'autres sujets, est le représentant de cet ordre d'idées.

Je voudrais définir tous ces développements par un seul mot : l'*Arithmétization des Mathématiques*. Et maintenant, je me propose de vous parler de l'influence, que pourrait avoir cette tendance générale, au delà du domaine de l'Analyse, sur les autres parties de notre Science. La question ainsi posée, d'une part, nous devons admettre volontiers l'extraordinaire importance des développements du sujet; mais, d'autre part, il nous faut repousser cette idée que, dans la Science ainsi arithmétizée, nous aurions, comme en un extrait concentré, l'ensemble total proprement dit de la Mathématique existant déjà. D'après ceci, je développerai ma pensée en deux directions : l'une, positive, qui affirme, et l'autre, négative, qui nie. Comme essence même de la question, ce n'est pas la forme arithmétique de la marche des idées que j'envisage, mais plutôt l'acuité logique, la rigueur, que l'on obtient à l'aide de cette forme; la nécessité, par suite, se présente (et c'est là le côté positif de mon programme) de *refondre* et remanier, en s'appuyant sur les principes de l'Analyse à base arithmétique, les autres disciplines de la Mathématique. D'autre part, je dois établir, et cela en y insistant beaucoup (c'est ici le côté négatif de la question) que les Mathématiques n'ont été nullement créées à l'aide de la déduction logique, mais bien plutôt qu'à côté de cette dernière, même encore de nos jours, l'intuition conserve son rôle, son influence spécifique complète. Pour épuiser le sujet, je devrais encore parler du côté algorithmique des Mathématiques et, par conséquent, du rôle des

méthodes formelles; néanmoins, je laisserai de côté, en cette occasion, ce sujet qui est plus éloigné de mes recherches personnelles.

Du reste, ne croyez pas que j'aie beaucoup de nouveau à développer ici sur des sujets particuliers. Il s'agit plutôt essentiellement de réunir et de grouper ce que nous avons sous la main et, lorsque cela est nécessaire, d'en présenter une justification.

Le court laps de temps qui m'est octroyé m'oblige à me restreindre à faire ressortir quelques points principaux. Permettez-moi d'abord de donner une esquisse du côté positif de ma thèse dans ses rapports avec le domaine de la Géométrie. Le point de départ de l'arithmetization des Mathématiques a, comme je l'ai indiqué, tiré son origine de cette circonstance que l'on a écarté l'intuition de l'espace. Lorsque nous portons nos études sur la Géométrie, la première chose à faire c'est de rattacher par un lien nouveau à l'intuition de l'espace les résultats acquis par voie arithmétique. Par ceci j'entends que nous devons admettre les principes habituels de la Géométrie analytique et à leur aide faire la recherche de l'interprétation géométrique des nouveaux développements analytiques. Ce n'est pas en général difficile, mais, d'autre part, c'est intéressant au plus haut degré. J'ai pu poursuivre cet ordre d'idées en diverses nombreuses directions dans une série de conférences que j'ai données dans ce but l'an dernier [1]. Comme résultat on acquiert une habitude, un exercice de l'intuition de l'espace provenant d'un raffinement, d'une acuité plus grande dans cet ordre d'idées; et, d'autre part, cette tendance a cet avantage précieux qu'elle met en pleine lumière les développements ana-

---

[1] Voir la note p. 126.

lytiques en question et qui perdent alors un caractère paradoxal qui, maintes fois, semblait leur être attaché. Quelle est la définition la plus générale d'une courbe, d'une surface? Qu'entend-on en disant qu'une courbe, etc., est *analytique* ou *non analytique?* Ces questions et celles qui leur sont analogues doivent être épuisées jusqu'à l'évidence la plus complète. Le second point à considérer est celui-ci. C'est que nous introduisons les principes qui servent de fondement à la Géométrie dans les nouvelles recherches. Cela pourrait-se faire certes comme autrefois d'une manière purement géométrique; mais, par l'effet des influences actuelles, la corrélation avec le système de tout l'ensemble de l'Analyse, et par conséquent avec les méthodes de la Géométrie analytique, est placée au premier plan. La recherche extérieure des formules par lesquelles on peut représenter les constructions de l'espace, la Géométrie non-euclidienne par conséquent, et ce qui s'y rattache, tout cela n'est qu'un côté du sujet.

Une question plus profonde est celle-ci. Pourquoi pouvons-nous regarder l'ensemble des points de l'espace comme une multiplicité numérique telle que nous puissions, entre les nombres rationnels, rangés, comme l'on sait, en trois directions, interpoler les nombres irrationnels? Nous arrivons ainsi à cette opinion : l'intuition de l'espace présente quelque chose d'inexact que nous idéalisons pour faire des Mathématiques à l'aide de ce que l'on nomme des *axiomes* (qui représentent pour nous des *postulata* réels, des propositions de condition). Quant aux philosophes, le problème ici posé a été en particulier traité par Kerry, enlevé, depuis, par une mort prématurée. Je crois pouvoir adhérer en général aux idées qu'il développe, et

notamment à ce qui est relatif à sa critique de du Bois-Reymond.

Inversement la nouvelle exposition de la conception de l'espace est pour nous la source de nouvelles conceptions analytiques. Nous croyons voir dans l'espace le nombre infini des points et des constructions formées par ceux-ci d'une manière immédiate. C'est là l'origine des recherches formant la base de l'étude des ensembles (Mengen) et des nombres transfinis, au moyen desquels Georg Cantor a enrichi la Science arithmétique d'un cercle d'idées tout nouveau. Enfin nous exigeons encore que le nouvel ordre d'idées joue un rôle dans les domaines les plus élevés de la Géométrie et en particulier dans la Géométrie infinitésimale; cela aura lieu encore le plus facilement si nous conservons ici encore les méthodes de la Géométrie analytique. Naturellement je ne parle pas de calculs aveugles pratiqués sur les lettres x, y, z, mais seulement d'un usage subsidiaire de ces grandeurs partout où il s'agit de la fixation précise d'un passage à la limite.

Telle est à grands traits l'esquisse du nouveau programme géométrique. Il est, comme vous le voyez, bien différent des tendances qui régnaient dans la première moitié de notre siècle et qui en ce temps ont conduit au développement de la Géométrie projective (laquelle depuis longtemps est devenue une branche intégrante de notre Science). La Géométrie projective nous a ouvert de nombreux domaines nouveaux de la Science avec la facilité la plus grande; on pourrait la célébrer à bon droit en disant qu'elle ouvre *une route royale* conduisant à travers son domaine. Au contraire, notre nouveau chemin est pénible et hérissé de ronces; il faut une attention de chaque instant pour en tourner les obstacles.

Nous revenons ainsi plutôt aux méthodes des anciens et nous apprenons à comprendre en même temps d'une nouvelle manière leurs méthodes à l'aide de nos conceptions modernes, comme l'a exposé brillamment Zeuthen en ces derniers temps. Les mêmes courants d'idées ont été introduits dans les domaines de la Mécanique et de la Physique mathématique. Pour ne pas entrer en trop de détails je citerai seulement deux exemples à cet effet. Dans toutes les Mathématiques appliquées, on doit faire ce que j'ai déjà indiqué comme nécessaire relativement à l'intuition de l'espace, c'est-à-dire idéaliser les points de départ en vue du traitement mathématique. Maintenant, en général, selon le but que l'on a devant les yeux, en un seul et même domaine on peut employer à côté les uns des autres divers genres d'idéalisation. Dans cet ordre d'idées, pour ne citer qu'un exemple, on regarde la matière, tantôt comme remplissant l'espace d'une manière continue, tantôt comme discontinue et formée de molécules séparées, qu'on regarde aussi soit au repos, soit animées de mouvement. Quand et jusqu'à quel point ces diverses méthodes de présentation sont-elles mathématiquement équivalentes pour les développements que l'on veut en tirer? Les anciennes recherches de Poisson et d'autres, comme aussi les développements de la théorie cinétique des gaz, n'approfondissent pas à ce point de vue suffisamment les choses pour le mathématicien de notre époque. Je crois qu'une publication que prépare M. Boltzmann fournira sur ceci d'intéressants résultats. Une autre manière de poser la question est la suivante : L'expérience physique met à notre disposition des faits expérimentaux auxquels nous donnons inconsciemment une généralisation mathématique et que nous transportons comme théorèmes sur des êtres idéalisés. A ceci se

rattache l'existence de la fonction dite *de Green* relative à une surface fermée quelconque et à pôle pris arbitrairement, ce qui correspond à ce fait du domaine de l'électricité que pour chaque corps conducteur, sous l'influence d'un point électrisé quelconque, il y a une distribution d'électricité en équilibre. Tel est le cas encore de l'application que j'ai faite des courants électriques qui ont lieu sur une surface conductrice quelconque quand on y applique les électrodes d'une pile galvanique; j'ai ainsi montré notamment que ces considérations conduisent immédiatement aux théorèmes fondamentaux de la théorie riemannienne des fonctions abéliennes (¹). A cet ordre d'idées appartient encore ce théorème que tout corps élastique limité est susceptible d'une série infinie d'oscillations harmoniques, et bien d'autres propositions encore. Ces théorèmes pris d'une manière abstraite sont-ils effectivement des théorèmes mathématiquement exacts et rigoureux; autrement dit, comment doit-on les limiter, les préciser pour qu'ils deviennent parfaitement vrais? Les mathématiciens ont porté sur ceci leurs efforts avec succès; d'abord Karl Neumann et Schwarz, dans la théorie du potentiel, et depuis les savants français, en continuant dans la voie ouverte par les travaux allemands, sont parvenus à ce résultat que les théorèmes tirés de la Physique se sont en grande mesure révélés comme exacts. Vous voyez ici clairement de quoi il s'agit relativement aux recherches en question, et je désire attirer votre attention sur ceci : il s'agit, non de nouveaux points de vue, mais plutôt de méthodes de démonstrations abstraites que nous cultivons pour elles-mêmes en vue de la clarté et

---

(¹) KLEIN, *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*. Teubner, 1882.

de la précision qui sont introduites ainsi dans notre compréhension des phénomènes; ou encore, si j'ose employer une expression de Jacobi, dans un sens d'ailleurs légèrement modifié, il s'agit seulement de l'*honneur de l'intelligence humaine*.

Messieurs, il devient maintenant presque difficile d'assurer à l'intuition, en contradiction avec les développements précédents, la part qui lui revient dans notre Science, et, cependant, c'est sur cette antithèse, précisément, que repose la signification propre de mon exposé. Et j'ai moins en vue cette forme cultivée de l'intuition, dont il était question tout à l'heure, intuition qui s'est développée sous l'influence de la déduction logique, et que je pourrais nommer une forme de la mémoire, que cette intuition naïve, qui, pour une grande part, est un talent inné et qui, d'ailleurs, s'élargit inconsciemment par l'effet de l'étude approfondie de telle ou telle partie de la Science. Le mot *intuition* n'est peut-être pas très convenablement choisi. Je voudrais y comprendre encore ce sentiment, cet instinct de la Mécanique par lequel un ingénieur apprécie la distribution des forces dans une construction quelconque dont il est l'auteur, et, de même, cet instinct indéfinissable que possède le calculateur exercé relativement à la convergence des opérations infinies qui se présentent à lui.

Je dis que *l'intuition mathématique ainsi comprise précède partout dans son domaine le raisonnement logique, et, par conséquent, en tout instant, possède une plus vaste région que ce dernier*.

Je pourrais introduire ici d'abord une excursion historique qui montrerait, en effet, que l'intuition a inauguré les commencements dans les diverses branches de notre Science et que le traitement rigoureux et logique n'est

venu qu'ensuite. Et certes ceci est vrai, non seulement en grand dans l'histoire des origines du Calcul infinitésimal, ainsi que je l'ai indiqué en commençant, mais il en est encore ainsi dans bien des doctrines, dont le commencement date du siècle présent. A ce sujet, pour ne citer qu'un fait, je rappellerai la théorie des fonctions d'une variable complexe de Riemann; j'ajouterai encore volontiers ceci, c'est que la discipline qui, pendant bien longtemps, a semblé la plus étrangère à l'intuition, je parle de la théorie des nombres, vient de prendre un nouvel et brillant essor par l'introduction des méthodes intuitives entre les mains de Minkowski et d'autres. Il serait aussi d'un grand intérêt de poursuivre, à ce point de vue, l'étude du développement, non d'une discipline mathématique particulière, mais d'une personnalité mathématique individuelle. Je me contenterai ici d'une indication; les deux plus puissants chercheurs du temps présent, Lie, de Leipzig, et Poincaré, de Paris, ont pris, à l'origine, leur point de départ dans l'intuition.

Mais tout ceci, si je voulais entrer en plus de détails, me conduirait à considérer trop de particularisations, et, en même temps, seulement des cas exceptionnels. Je préfère donc décrire ce qu'une intuition tant soit peu exercée accomplit journellement, en dépassant le traitement par le calcul ou les constructions, dans la résolution quantitative de problèmes physiques ou techniques. Si je reviens, par exemple, aux deux problèmes relatifs à l'électricité, dont j'ai déjà parlé, on reconnaît que chaque physicien, dans le cas donné, peut, sans difficulté, assez exactement déterminer la forme des surfaces de niveau de la fonction de Green, ou les courants dans la seconde desdites expériences. Ou bien prenez encore le cas d'une équation différentielle

quelconque, par exemple (pour rester dans le cas le plus simple) d'une équation différentielle du premier ordre entre deux variables. Le traitement analytique très probablement échouera. Néanmoins, on peut tout de suite indiquer, par un procédé graphique, la marche générale des courbes intégrales, comme cela a été fait tout récemment par Lord Kelvin, un des grands maîtres de l'intuition mathématique, pour une équation différentielle célèbre du problème des trois corps. Il s'agit, dans tous les cas analogues, pour parler le langage de l'Analyse, d'une sorte d'interpolation où l'on tient compte, moins de l'exactitude des détails que de l'appréciation des conditions générales. J'affirmerai encore ceci : dans l'établissement de toutes nos lois naturelles, ou, en général, lorsque nous cherchons à formuler mathématiquement des phénomènes extérieurs, quels qu'ils soient, nous employons un artifice analogue d'interpolation. Il s'agit, toujours, en effet, d'extraire du milieu de l'ensemble de perturbations accidentelles les liaisons simples des grandeurs essentielles. C'est là, en dernier lieu, ce que j'ai appelé précédemment le procédé de l'idéalisation. Les considérations de la logique reprennent tous leurs droits seulement lorsque l'intuition a déjà réalisé complètement le problème de l'idéalisation.

Je vous prie de regarder ces indications, non comme une explication, mais comme une simple description des relations entre les faits. Le mathématicien ne peut que constater par l'observation personnelle la nature propre du fait psychique qui a lieu dans chaque cas particulier. Peut-être un jour la Physiologie et la Psychologie expérimentales nous renseigneront-elles exactement sur les relations plus intimes qui peuvent exister entre les *processus* dérivant de l'intuition et ceux qui sont du do-

maine du pouvoir logique. Qu'il s'agisse ici, en effet, de facultés de l'âme distinctes, c'est-à-dire qui ne sont pas nécessairement reliées entre elles, c'est ce que nous démontrent les grandes différences que nous révèlent les observations faites sur divers individus. Les psychologues modernes distinguent une faculté visuelle, une faculté motrice et une faculté auditive. Il semblerait que l'intuition mathématique, comme je la comprends, correspondrait plutôt aux deux premières, et la compréhension logique plutôt à la dernière. La Psychologie est au commencement de ces recherches, auxquelles, avec nombre de mes Collègues, je prends le plus grand intérêt. En effet, nous avons l'espoir que maintes différences d'opinion sur notre Science et son exercice, différences qui restent maintenant inébranlables, disparaîtront lorsque nous serons plus exactement renseignés sur les conditions psychologiques de la pensée mathématique et sur ce qui les différencie individuellement entre elles.

Je n'insisterai ici que brièvement sur le côté pédagogique de la Mathématique. Nous observons maintenant en Allemagne, sous ce rapport, un fait très remarquable. Deux courants opposés coulent à côté l'un de l'autre sans réagir l'un sur l'autre d'une manière appréciable. Les maîtres de nos *gymnases* affirment avec tant d'énergie la nécessité d'un enseignement mathématique basé sur l'intuition, que l'on est obligé de s'y opposer et d'insister, au contraire, sur la nécessité de développements logiques approfondis. Telle est la tendance d'un petit écrit, que j'ai publié sur les problèmes de la Géométrie élémentaire, pendant le courant de l'été dernier [1]. Mais c'est tout le contraire chez les pro-

---

(1) F. Klein, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von* F. Tägert. Teubner; 1895. — Il en a

fesseurs de nos écoles supérieures : l'intuition, la plupart du temps, est non seulement estimée de peu de valeur, mais même, si c'est possible, toujours rejetée de côté. C'est là, sans aucun doute, une conséquence de l'extrême importance qu'ont prise les tendances à l'arithmetization dans les Mathématiques modernes. Mais ici l'on va au delà du but. Il est temps de déclarer une fois pour toutes publiquement qu'il ne s'agit pas seulement d'une direction à rebours dans la pédagogie, mais encore d'une tendance à regarder l'ensemble de la Science sous une perspective oblique. Pour moi, je laisse à tout *docent* académique le champ le plus libre, et j'ai, par conséquent, toujours refusé de proposer des règles générales pour l'enseignement mathématique supérieur. Ce qui ne m'empêche pas d'affirmer hautement qu'il y a en tout cas deux catégories de cours (*Vorlesungen*) mathématiques qui doivent prendre nécessairement leur point de départ dans l'intuition. Ce sont premièrement les cours élémentaires, qui préparent le commençant aux hautes Mathématiques ; car le maître doit, conformément à la nature des choses, parcourir en petit la même voie de développement que la Science a suivie en grand. Ce sont ensuite les cours dont les auditeurs doivent avoir en vue, dès le premier abord, de travailler essentiellement avec l'intuition, c'est-à-dire les cours pour ceux qui étudient les Sciences naturelles [1] (*Naturforscher*) et pour les ingénieurs. Nous avons, par l'exagération de la forme logique, déjà trop perdu, en

---

été rendu compte dans le *Bulletin* de M. Darboux, 2e série, t. XX ; mars 1896. — M. Griess, professeur au lycée d'Alger, qui a traduit les *Applications of elliptic functions* de Greenhill, en a publié récemment une rédaction française. Nony, éditeur.

(1) Y compris la Physique, etc., dans le même ordre d'idées que le *Natural Philosophy* des Anglais.

ces domaines de la Science, de l'importance générale qui, par la nature des choses, appartient aux Mathématiques; il est grandement temps, et c'est un strict devoir pour nous, de reconquérir cette importance par une conduite conforme à ce but.

Je reviens encore aux considérations théoriques. La conception générale que j'ai concernant les problèmes actuels de la Science mathématique n'a guère besoin d'être formulée d'une manière plus spéciale. En même temps que j'exige partout l'étude logique complète et approfondie des matériaux, j'affirme également que l'on doit aussi nécessairement les travailler et les envisager sous tous les aspects à l'aide de l'intuition et de ses méthodes. Les développements mathématiques qui tirent leur origine de l'intuition ne peuvent d'autre part être admis comme possession définitive de la Science que lorsqu'ils ont été ramenés à une forme logique rigoureuse. Réciproquement, le traitement abstrait des relations logiques ne peut nous suffire, tant que leur portée n'a pas été vivifiée à l'aide de chaque mode d'intuition et tant que nous n'apercevons pas les combinaisons multiples qui relient le *schéma* logique, dans le domaine que nous avons choisi, avec les autres parties de nos connaissances.

Je compare la Science mathématique à un arbre dont les racines s'enfoncent chaque jour plus profondément dans la terre, tandis qu'au-dessus les branches s'étendent librement et nous ombragent. Devons-nous en regarder les racines ou les branches comme la partie la plus essentielle? Le botaniste nous enseigne que la question est mal posée et que la vie de l'organisme dépend plutôt de l'*échange mutuel entre ses différentes parties*.

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE NOVEMBRE 1896. — COMPOSITIONS.

Dijon.

Analyse. — I. *Périodes et valeurs diverses de l'intégrale*

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(a-z)(b-z)(c-z)(d-z)}}.$$

II. *Obtenir l'équation finie $y = f(x)$ de la courbe plane dont l'aire comprise entre elle, l'axe des x et les ordonnées d'abscisses* 0, x *a pour expression*

$$\left[\frac{y}{\varphi(x)}\right]^m,$$

m et $\varphi(x)$ représentant un exposant et une fraction de x dérivés tous deux.

En posant

$$\int_0^x y\,dx = u,$$

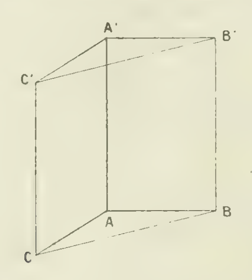
on obtient immédiatement l'équation différentielle

$$u = \left[\frac{\dfrac{du}{dx}}{\varphi(x)}\right]^m,$$

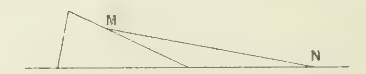
dont l'intégration s'opère sans difficulté. Il ne reste plus qu'à déterminer la constante arbitraire (ce qui n'est pas toujours possible), puis à différentier l'expression de u pour arriver à celle de y.

Mécanique. — I. *Attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur.*

II. *Un prisme droit homogène, dont les bases sont deux triangles rectangles* ABC, A'B'C', *repose par la face* ABA'B' *sur un plan horizontal le long duquel il peut glisser sans frottement. Une tige pesante* MN,



située dans le plan de la section droite du prisme qui contient le centre de gravité, s'appuie, d'une part, sur



le plan horizontal et, d'autre part, sur la face BCB'C', *et glisse sans frottement à ses deux extrémités.*

On demande le mouvement du système.

La tige pesante est homogène. Dans sa position initiale, son extrémité supérieure est sur l'arête CC' *et les vitesses initiales sont nulles.*

On applique les théories des forces vives et du mouvement du centre de gravité.

Lyon.

Analyse. — I. *Démontrer que trois surfaces orthogonales se coupent suivant des lignes de courbure.*

II. *Intégrer*

$$pq = px + qy, \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Tout se réduit à trouver une intégrale *complète*, c'est-à-dire contenant deux paramètres arbitraires. Si z était une forme quadratique $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, il en serait de même encore pour les deux expressions pq et $px + qy$. Poursuivons donc l'identification. Il viendra

$$\begin{aligned} pq &= 4(Ax + By)(Bx + Cy) \\ &= px + qy \\ &= 2(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2), \end{aligned}$$

d'où

$$0 = A(2B - 1) = C(2B - 1), \qquad AC = B(1 - B),$$

c'est-à-dire

$$0 = A = C, \qquad B = 1 \qquad \text{et} \qquad z = 2xy$$

(solution sans paramètre), ou bien

$$B = \frac{1}{2}, \qquad AC = \frac{1}{4}.$$

Il vient ainsi l'intégrale complète

$$z = xy + \lambda x^2 + \frac{1}{4\lambda} y^2 + \mu,$$

$$\lambda, \mu = \text{const. arbitr.}$$

L'intégrale générale se construira par les procédés connus.

MÉCANIQUE. — *Un point* M *matériel non pesant est assujetti à se déplacer sans frottement sur un cylindre à section droite elliptique.* M *est attiré vers un point* O, *situé sur l'axe du cylindre, proportionnellement à la distance. Trouver le mouvement.*

Prenons O pour origine des coordonnées rectangulaires et l'axe du cylindre pour axe des z.

Soit A le point où la génératrice de M perce le plan des xy.

Le théorème des aires montre que A décrit la section droite suivant la loi képlérienne (aires proportionnelles aux temps). Projetons maintenant sur l'axe du cylindre, il viendra

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\mu^2 z, \qquad z = z_0 \cos \mu (t - t_0),$$

$$\mu = \text{const. de l'attraction.}$$

On connaît ainsi comment se déplacent la génératrice variable MA et le point M sur ladite génératrice. La méthode est valable pour une section droite quelconque.

Achevons la solution pour la section droite elliptique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{ou} \qquad x = a \cos \varphi, \qquad y = b \sin \varphi.$$

On a (théorème des aires), $h^2 =$ const. des aires,

$$x\,dy - y\,dx = ab\,d\varphi = h^2\,dt.$$

Si T est le temps d'une révolution complète, $2\pi ab = h^2 T$ et

$$d\varphi = \frac{2\pi}{T}\,dt, \qquad \varphi - \varphi_0 = \frac{2\pi}{T}(t - t_0).$$

La trajectoire est définie par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a \cos \varphi, \qquad y = b \sin \varphi, \\ z = z_0 \cos \dfrac{\mu T (\varphi - \varphi_0)}{2\pi}, \qquad \dfrac{\varphi - \varphi_0}{2\pi} = \dfrac{t - t_0}{T} \end{array} \right\},$$

z_0, φ_0, T, t_0 dépendant des conditions initiales.

Marseille.

Analyse. — *Pour intégrer le système d'équations différentielles*

$$3x^3 \frac{dt_1}{dx} = (-3x^2 + 5)t_1 - (2x^4 + 12x^2 + 5)t_2,$$

$$3x^3 \frac{dt_2}{dx} = 5t_1 - 5(3x^2 - 2)t_2,$$

on fera successivement les changements de variables définis par les relations suivantes :

$$t_1 = z_1 + z_2, \qquad t_2 = z_2; \qquad z_1 x^2 = y_1, \qquad z_2 x^4 = y_2,$$

et l'on sera ramené à un système d'équations différentielles de forme classique aux variables y_1 *et* y_2.

On calculera les intégrales y_1 *et* y_2 *qui se réduisent à* $y_1 = 0$, $y_2 = -1$ *quand on fait* $x = 1$.

La variable x *décrivant un chemin fermé quelconque allant du point* $x = 1$ *au même point* $x = 1$, *quelles sont les différentes valeurs au point* $x = 1$ *des fonctions* y_1 *et* y_2, z_1 *et* z_2, t_1 *et* t_2 ?

Les changements de variables indiqués conduisent au système de forme classique

$$3x \frac{dy_1}{dx} = 3y_1 - 2y_2,$$

$$3x \frac{dy_2}{dx} = 5y_1 - 3y_2,$$

que l'on intègre en cherchant à déterminer les paramètres définis par

$$y_1 = k_1 x^r, \qquad y_2 = k_2 x^r.$$

L'équation caractéristique, qui donne r, est

$$9r^2 + 1 = 0.$$

et la solution demandée est

$$y_1 = 2\sin\left(\frac{\log x}{3}\right),$$

$$y_2 = 3\sin\left(\frac{\log x}{3}\right) - \cos\left(\frac{\log x}{3}\right).$$

Le seul point singulier à distance finie est l'origine. Tout chemin fermé allant du point $x = 1$ au point $x = 1$ rentre dans l'une des classes suivantes :

1° S'il n'entoure pas l'origine, y_1 et y_2 reprennent les valeurs 0 et -1 au point $x = 1$;

2° S'il entoure une ou plusieurs fois, même en tournant dans les deux sens, chaque tour augmente ou diminue l'argument de $\log x$ de 2π, et l'arc soumis au signe sinus augmente ou diminue de $\frac{2\pi}{3}$. Par exemple, trois tours successifs dans le même sens ramènent les valeurs initiales 0 et -1 de y_1 et de y_2. Il est facile de former toutes les valeurs demandées dans la dernière partie de la question.

Mécanique. — *Dans un plan horizontal, un tube homogène, de longueur $6a$, est mobile autour de son centre O, qui est fixe.*

Un point matériel, qui est mobile dans ce tube, est attiré par le point O proportionnellement à la distance.

La masse du tube est égale à celle du point.

A l'instant initial, le mobile est à une distance $2a$ du point O et la vitesse relative du mobile sur le tube est nulle.

La vitesse angulaire du tube est égale à ω.

Étudier le mouvement du système en supposant que l'attraction du point O sur le mobile à l'unité de distance est égale à $2m\omega^2$, où m désigne la masse du mobile et ω la vitesse angulaire initiale du tube.

Trouver la pression du point mobile sur le tube, et du tube sur le point O.

En désignant par m la masse commune du tube et du point, le moment d'inertie du tube par rapport au point O est $3ma^2$.

Si l'on applique le théorème des aires et celui des forces vives au mouvement du système, on obtient les deux équations suivantes, où ρ et θ désignent les coordonnées polaires du mobile :

$$(3a^2 + \rho^2)\frac{d\theta}{dt} = 7a^2\omega,$$

$$(3a^2 + \rho^2)\frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{d\rho^2}{dt^2} = 15a^2\omega^2 - 2\rho^2\omega^2,$$

et l'on en tire

$$\frac{d\rho}{dt} = \omega\sqrt{\frac{(a^2 - 2\rho^2)(\rho^2 - 4a^2)}{\rho^2 + 3a^2}};$$

ce qui prouve que le mobile oscillera entre les distances $\rho = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ et $\rho = 2a$.

La pression N du mobile sur le tube est

$$N = \rho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt},$$

et il n'y a qu'à substituer.

La pression du tube sur le point O est égale à la pression précédente N.

Astronomie. — *On donne les trois côtés d'un triangle sphérique*

$$a = 65°.27'.18'',32,$$
$$b = 84.35.26,84,$$
$$c = 95.43.53,76.$$

et l'on demande de calculer :

1° *Les trois angles* A, B *et* C ;

2° *Les accroissements qu'éprouvent ces trois angles quand les côtés reçoivent les petits accroissements respectifs*

$$\Delta a = +3'',2,$$
$$\Delta b = -4,5,$$
$$\Delta c = +6,7.$$

On considérera les accroissements comme des différentielles.

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2} = \frac{1}{\sin(p-a)}\sqrt{\frac{\sin(p-a)(\sin p-b)(\sin p-c)}{\sin p}},$$

$$\Delta A = \frac{1}{\sin c \sin B}(\Delta a - \cos B.\Delta b - \cos C.\Delta c), \qquad \Delta a = +3'',2,$$

$$\Delta B = \frac{1}{\sin a \sin C}(\Delta b - \cos C.\Delta c - \cos A.\Delta a), \qquad \Delta b = -4,5,$$

$$\Delta C = \frac{1}{\sin b \sin A}(\Delta c - \cos A.\Delta a - \cos B.\Delta b), \qquad \Delta c = +6,7.$$

			L sin.
$a =$	65°.27'.18'',32	$p - a = 57°.26'.\ 1,14$	$\bar{1}$,9257084
$b =$	84.35.26,84	$p - b = 38.17.52,62$	$\bar{1}$,7922172
$c =$	95.43.53,76	$p - c = 27.\ 9.25,70$	$\bar{1}$,6593765
$2p =$	245.46.38,92	N	$\bar{1}$,3773021
$p =$	122.53.19,45		$\bar{1}$,9241379
		N : sin p	$\bar{1}$.4531642
		$\sqrt{}$	$\bar{1}$,7265821
$\frac{A}{2}$	32°.18'.7'',98	tang $\frac{A}{2}$	$\bar{1}$,8008737
$\frac{B}{2}$	40.41.12.56	tang $\frac{B}{2}$	$\bar{1}$,9343649
$\frac{C}{2}$	49.24.56,08	tang $\frac{C}{2}$	0,0672056

		L cos.	L $\Delta a, \Delta b, \Delta c$.	L(cos x Δ).		
A	64°.36'.15'',96	$\bar{1}$,6324	+0,5051	+0,1375	cos A.Δa	+1'',37
B	81.22.25,12	$\bar{1}$,1764	−0,6532	−$\bar{1}$,8296	cos B.Δb	−0,68
C	98.49.52,16	−$\bar{1}$,1862	+0,8261	−0,0123	cos C.Δc	−1,03

		L(Δsin.sin.).	L(sin.sin.).	sin.		sin.	
ΔA. sin c sin B	4″,91	0,6911	$\bar{1}$,9537	a	$\bar{1}$,9589	C	$\bar{1}$,9948
ΔB. sin a sin C	−4,84	−0,6849	$\bar{1}$,9540	b	$\bar{1}$,9981	A	$\bar{1}$,9559
ΔC. sin b sin A	6,01	0,7789	$\bar{1}$,9929	c	$\bar{1}$,9978	B	$\bar{1}$,9951

		log Δ.
ΔA	5″,46	0,7374
ΔB	−5,38	−0,7309
ΔC	6,11	0,7860

Nancy.

Analyse. — I. *On considère une fonction entière $f(z)$ telle que l'on ait, quel que soit z,*

$$f(z+\omega) = \mu f(z),$$

ω et μ étant des constantes.

1° *Soient a et b deux points du plan des z où la fonction $f(z)$ prend une même valeur non nulle, la droite ab n'étant pas parallèle à la droite $O\omega$ qui joint l'origine au point ω; soient a' et b' les deux points $a+\omega$ et $b+\omega$; soient enfin $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ les zéros de $f(z)$ distincts ou non appartenant au parallélogramme ab, $a'b'$, aucun d'eux n'étant sur le contour. On demande de calculer, à un multiple de $2\pi i\omega$ près, les deux sommes d'intégrales rectilignes*

$$\int_a^b \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz + \int_{b'}^{a'} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz,$$

$$\int_{a'}^{a} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz + \int_{b}^{b'} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Quel est ce multiple dans le cas où, aucune des quantités π n'étant nulle, le module de $f(z)$ reste inférieur à tous leurs modules quand le point z décrit le côté ab?

2° *Démontrer que, si μ diffère de l'unité, il existe*

une fonction primitive F(z) *de* $f(z)$ *telle que l'on ait aussi*

$$F(z+\omega)=\mu F(z);$$

quel est, dans le cas de $\mu=1$, *la forme générale des fonctions primitives?*

II. *Les coordonnées étant rectangulaires, on considère la courbe plane* C *enveloppe de la droite*

$$x\sin\alpha-y\cos\alpha=\varphi(\alpha),$$

où α *désigne un paramètre variable et* $\varphi(\alpha)$ *une fonction déterminée de ce paramètre.*

1° *Supposant*

$$\varphi(\alpha)=\mathrm{A}\sin(\alpha+a)+\mathrm{A}\frac{\cos(\alpha+a)}{\alpha},$$

former l'équation différentielle du deuxième ordre à laquelle satisfait $\varphi(\alpha)$ *quelles que soient les constantes* A *et* a, *et écrire l'expression du rayon de courbure en fonction de* α.

2° *Trouver toutes les courbes* C *pour lesquelles* $\varphi(\alpha)$ *vérifie l'équation*

$$\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}-\left(1-\frac{2}{\alpha^2}\right)\varphi=\alpha.$$

I. En remarquant que

$$\int_b^{a'}\frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz=\int_b^{a}\frac{(z+\omega)f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

on voit que la première somme est égale à

$$-\int_b^{a}\frac{\omega f'(z)}{f(z)}\,dz=-\omega[\mathrm{L}f(b)-\mathrm{L}f(a)];$$

et comme $f(b)$ est égal à $f(a)$, elle est de la forme $2ni\pi\omega$, n étant un nombre entier qui se réduit à zéro

si le module de $f(z)$ reste inférieur aux modules des zéros $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ le long de ab.

La somme des quatre intégrales, étant l'intégrale de $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ prise le long du parallélogramme $abb'a'$, est égale au produit de $2i\pi$ par la somme des résidus de cette fonction, relatifs aux zéros $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ de $f(z)$, c'est-à-dire $2i\pi(\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n)$. Les deux sommes demandées sont ainsi connues.

Soit maintenant $\varphi(z)$ une fonction primitive de $f(z)$; elle satisfait à l'équation

$$\varphi'(z+\omega) = \mu\varphi'(z),$$

d'où l'on tire

$$\varphi(z+\omega) = \mu\varphi(z) + c;$$

si μ diffère de l'unité, il suffit de poser

$$F(z) = \varphi(z) + \frac{c}{\mu - 1}$$

pour satisfaire à la condition

$$F(z+\omega) = \mu F(z);$$

si μ est égal à l'unité, la forme générale des fonctions primitives est $F(z) + \frac{cz}{\omega}$, $F(z)$ étant une fonction de z particulière admettant la période ω.

II. En éliminant les paramètres A et α entre $\varphi(\alpha)$ et ses deux premières dérivées, on trouve que la fonction $\varphi(\alpha)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + \left(1 - \frac{2}{\alpha^2}\right)\varphi = 0,$$

et que le rayon de courbure est égal à $\varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha)$. Pour intégrer l'équation différentielle donnée, avec second membre, il suffit d'ajouter à la valeur attribuée

à $\varphi(\alpha)$, dans la première partie, l'intégrale particulière

$$\alpha + \frac{2}{\alpha}.$$

Mécanique. — *Démontrer que la stabilité de l'équilibre d'un solide rigide homogène pesant, flottant dans un fluide homogène pesant, est assurée lorsque le centre de poussée n'est pas au-dessous du centre de gravité du solide rigide, à une distance supérieure à $\frac{I}{V}$, où I est le plus petit moment d'inertie de la section d'affleurement, relativement aux axes passant par son centre de gravité, et où V est le volume immergé.*

Épreuve pratique. — Astronomie. — *Calculer la longitude et la latitude d'un astre dont les coordonnées équatoriales sont*

$$Æ = 8^h\,18^m\,30^s, \qquad D = 10^\circ 36' 52'' 4;$$

l'obliquité de l'écliptique est $\omega = 23^\circ 27' 35'' 8$.

Poitiers.

Analyse. — *Montrer que l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad f\left(p.q.\frac{y}{x}\right) = 0$$

admet des solutions qui représentent des cônes ayant leurs sommets sur l'axe O*z*.

Considérant en particulier l'équation

$$(2) \qquad qx - py - \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\sqrt{x^2 + y^2}\,\varphi\frac{x}{y} = 0,$$

transformer cette équation et l'équation différen-

tielle des cônes dont le sommet est sur Oz, en prenant pour variables indépendantes les coordonnées polaires r et θ.

Faire voir que l'on obtient l'équation finie des cônes solutions communes à l'aide de quadratures.

Effectuer le calcul en supposant

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{my}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Examiner le cas où m = 1.

Démontrer que toutes les surfaces représentées par l'équation (2) sont coupées par le plan y = ax suivant des lignes de courbure. (a désigne une constante.)

Mécanique. — 1. *Lieu des points d'un plan lié au mouvement d'un corps solide dont les vitesses, à un instant donné, sont également inclinées sur la normale au plan.*

2. *Équations du mouvement d'un solide de révolution autour d'un point fixe. — Intégrales premières. — Cas d'un corps pesant animé d'une très grande vitesse de rotation autour de son axe, et que l'on abandonne à lui-même sans autre vitesse initiale. — Calcul de la précession et de la nutation à un instant quelconque.*

Astronomie. — *Le 1er novembre 1896, à midi vrai, la déclinaison du Soleil est* — 14° 41′ 19″ 4.

Le 2 novembre, elle est — 15° 0′ 16″ 5.

L'accroissement de l'ascension droite dans l'intervalle est 3m 56s. 2.

Calculer l'obliquité de l'écliptique.

Toulouse.

Analyse. — I. *a, b, c, d désignant des quantités données, étudier les valeurs diverses de l'intégrale*

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(a-z)(b-z)(c-z)(d-z)}}$$

lorsque le chemin d'intégration varie, en conservant les mêmes extrémités; indiquer ce que l'on entend par périodes de cette intégrale.

II. *On considère l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$1 + p^2 + q^2 - 2z = 0,$$

où p et q désignent, suivant l'usage, les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, par rapport aux variables indépendantes x et y de la fonction z.

1° *Démontrer que, si l'on considère x, y, z comme les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point, il existe des surfaces intégrales particulières de cette équation qui sont de révolution autour d'une parallèle à l'axe coordonné Oz.*

2° *Déterminer une surface intégrale passant par la parabole dont les équations sont*

$$x = 0, \qquad y = 2z - 1;$$

ce problème admet-il une ou plusieurs solutions?

Mécanique. — I. *Un point matériel pesant, assujetti à se mouvoir sur un cylindre de révolution dont l'axe est vertical, est attiré par un point fixe proportionnellement à la distance. On demande d'étudier le mouvement de ce point. Pression exercée par le point sur la surface.*

Cas particulier : le centre d'attraction est situé sur l'axe du cylindre.

II. *Indiquer très succinctement la marche à suivre pour établir les six équations d'Euler, qui permettent d'étudier le mouvement d'un corps solide assujetti à tourner autour d'un point fixe et sollicité par des forces données.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une planète décrit une orbite elliptique. A un instant donné, l'anomalie vraie* v, *l'excentricité* $\sin\varphi$, *le rayon vecteur* r *sont déterminés par les valeurs suivantes :*

$$v = 310^\circ 55' 29'',64, \qquad \varphi = 14^\circ 12' 1'',87, \qquad \log r = 0,3307640.$$

On demande le paramètre de l'orbite, le demi grand axe, et, à l'instant donné, l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1560 [1].

(1885, p. 536).

Trouver le rayon d'un cercle passant par les points dont les coordonnées trilinéaires sont

$$(-a, b, c), (a, -b, c), (a, b, -c).$$

(HANUMENTA RAU.)

SOLUTION

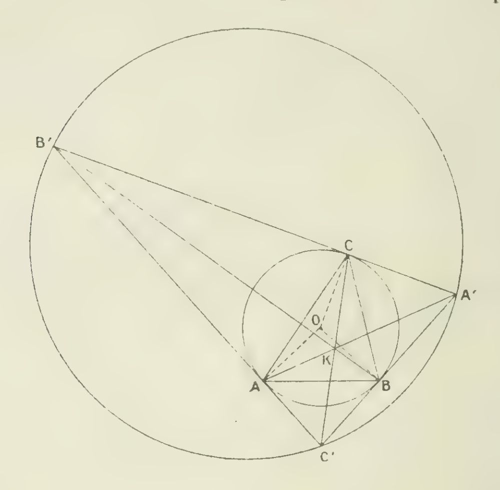
Par M. H. LEZ.

Le cercle passant par les points dont les coordonnées trilinéaires sont $(-a, b, c)$ $(a, -b, c)$ $(a, b, -c)$ est le cercle

---

(1) *Voir* 1891, p. 39, une solution de M. BARISIEN.

circonscrit au triangle A′B′C′, polaire du triangle ABC, car les sommets A′, B′, C sont les points associés du point de



Lemoine K, ayant des coordonnées proportionnelles à a, b, c.

Soient donc a', b', c' les côtés du triangle A′B′C′, sa surface sera $\frac{R}{2}(a'+b'+c')$, R étant le rayon du cercle circonscrit à ABC.

Si ρ est le rayon du cercle circonscrit au triangle A′B′C′, on aura

$$(1)\qquad \rho = \frac{a'b'c'}{2R(a'+b'+c')}.$$

Mais

$$a' = AC' + AB' = R(\operatorname{tang} C + \operatorname{tang} B) = R\,\frac{\sin A}{\cos B \cos C},$$

$$b' = BC' + BA' = R(\operatorname{tang} C + \operatorname{tang} A) = R\,\frac{\sin B}{\cos A \cos C},$$

$$c' = CA' + CB' = R(\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B) = R\,\frac{\sin C}{\cos A \cos B}.$$

Alors l'égalité (1) devient

$$\rho = \frac{R^3 \sin A \sin B \sin C}{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} \times \frac{1}{4R^2(\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C)}.$$

Remarquant que, dans un triangle,

$$\tang A + \tang B + \tang C = \frac{\sin A . \sin B . \sin C}{\cos A . \cos B . \cos C},$$

la valeur du rayon ρ se réduit à

$$\frac{R}{4 \cos A \cos B \cos C}.$$

Question 1684.

(1894, p. 5*.)

Le lieu des points de rencontre des tangentes menées par deux sommets d'un triangle à toute conique conjuguée par rapport à ce triangle et passant en outre par un point fixe est une quartique trinodale. (A. Cazamian).

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Soient B et C les deux sommets considérés du triangle, P et Q les points d'intersection d'une des coniques avec BC. Les droites AP et AQ sont donc tangentes à cette dernière. Effectuons maintenant une transformation homographique de manière que les points B et C coïncident avec les ombilics du plan. a, le transformé du point A, deviendra le centre de la conique transformée; ap et aq étant conjuguées harmoniques par rapport aux directions isotropes seront orthogonales; donc aussi les asymptotes de la conique transformée, qui sera une hyperbole équilatère. Le problème revient donc à chercher le lieu des foyers des hyperboles équilatères concentriques passant par un point fixe. Ce lieu, qu'on obtient sans difficulté, est une lemniscate ayant son point double inflexionnel en a. La lemniscate étant une quartique bi-circulaire, en revenant au problème primitif on trouve pour le lieu une quartique trinodale, les nœuds coïncidant avec les sommets du triangle.

Autre solution de M. H. Lez.

Question 1698.

(1895, p. 38*.)

On considère le triangle formé par un point M *d'une ellipse, le pôle de la normale en* M *et le centre de l'ellipse.*

On considère en outre le rectangle formé par le point M, *le centre de l'ellipse et les projections de ce centre sur la tangente et la normale en* M.

Quel que soit le point M *sur l'ellipse, le produit des aires du triangle et du rectangle est constant.*

(E.-N. Barisien).

SOLUTION

par M. H. A. Droz-Farny.

Soient $x' = a\cos\varphi$, $y' = b\sin\varphi$ les coordonnées d'un point M de l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. La tangente et la normale en M ont respectivement pour équations $bx\cos\varphi + ay\sin\varphi = ab$ et $ax\sin\varphi - by\cos\varphi = c^2\sin\varphi\cos\varphi$.

On trouve aisément, pour les coordonnées du pôle P de la normale,

$$x'' = \frac{a^3}{c^2\cos\varphi}, \qquad y'' = \frac{-b^3}{c^2\sin\varphi},$$

donc

$$\text{deux triangles OMP} = 2S = x'y'' - y'x'' = \frac{ab}{c^2}\,\frac{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

$$\text{distance du centre à la tangente } d = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}},$$

$$\text{distance du centre à la normale } d' = \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}},$$

$$\text{rectangle indiqué R} = dd' = \frac{abc^2\sin\varphi\cos\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi},$$

$$\text{et par conséquent : RS} = \frac{a^2b^2}{2} = \text{constante}.$$

M. Mannheim fait remarquer que la question 1698 peut être résolue géométriquement de la manière suivante :

Sur la tangente en M à l'ellipse prenons le pôle P de la normale en M et projetons en T le centre O de l'ellipse.

L'aire du rectangle est égale à MT × OT. Le double de l'aire du triangle OMP est égal à MP × OT. Le produit de ces aires est $\overline{\text{OT}}^2 \times \text{MP} \times \text{MT}$.

La droite OT étant parallèle à la normale en M est le dia-

mètre conjugué de OP. Le produit MP $\times$ MT est alors égal au carré du demi-diamètre conjugué de OM. On sait que le produit de ce carré par $\overline{OT}^2$ est constant quel que soit M; donc, etc.

Questions 1758 et 1759.

(1897, p. 100 [1]).

REMARQUES

Par M. CANON.

A la page 181 de son Ouvrage de *Géométrie cinématique*, M. Mannheim démontre que *lorsque quatre points d'une droite mobile restent sur des sphères fixes dont les centres sont dans un même plan, un point quelconque de la droite décrit une ligne qui appartient à une sphère dont le centre est aussi sur ce plan.*

Cet énoncé n'est autre que celui de la question proposée sous le n° 1758. M. Mannheim ajoute que *les centres des sphères, qui contiennent les lignes ainsi décrites, appartiennent à une conique.*

A la page 105 du même Ouvrage, M. Mannheim, étudiant les propriétés relatives au déplacement d'une figure de grandeur invariable démontre que *lorsque des plans sont parallèles à une droite* D, *les plans normaux à chacun d'eux, menés respectivement par leurs caractéristiques, passent par une même droite* L, *qui est l'adjointe au plan perpendiculaire à* D. et il ajoute plus loin (p. 108) qu'*une adjointe à un plan est toujours parallèle à l'axe du déplacement.*

Cet énoncé n'est autre que celui de la question proposée sous le n° 1759.

M. Mannheim donne cette conséquence : *Les caractéristiques des plans d'un faisceau mobile appartiennent à un hyperboloïde dont les plans des sections circulaires sont perpendiculaires les uns à l'arête du faisceau et les autres à l'adjointe au plan perpendiculaire à cette arête, c'est-à-dire à l'axe du déplacement.*

---

(1) *Voir* les énoncés, *loc. cit.*

QUESTIONS.

1760. Étant donnés deux faisceaux, l'un d'ordre m, l'autre d'ordre n, le lieu géométrique des points où les courbes des deux faisceaux se coupent sous un angle constant α est une courbe d'ordre $2(m+n-1)$. Quand $\alpha = 0$, cette courbe se décompose en une courbe d'ordre $2(m+n)-3$ et la droite de l'infini. (E. DEWULF.)

1761. Cinq droites quelconques sont données dans un plan. On mène une transversale par un point fixe, et sur cette droite, on prend un sixième point qui forme une involution avec les cinq points déterminés par les cinq droites données. Le lieu géométrique de ce sixième point, quand la transversale tourne autour de son pivot, se compose de cinq coniques.

(E. DEWULF.)

1762. Les caractéristiques des plans tangents à un cône de la classe n forment une surface d'ordre $2n+1$.

(E. DEWULF.)

1763. Soient $C_n(xy) = 0$, $C_m(xy) = 0$ les équations de deux courbes d'ordres respectifs n et m. Si un point est commun à ces deux courbes et si son ordre de multiplicité est n' pour C_n et m' pour C_m, il appartient aussi à la courbe représentée par l'équation

$$\frac{\partial C_n}{\partial x}\frac{\partial C_m}{\partial y} - \frac{\partial C_n}{\partial y}\frac{\partial C_m}{\partial x} = 0,$$

et est multiple de l'ordre $m'+n'-2$ pour cette courbe.

Donner une interprétation algébrique de ce théorème.

(E. DEWULF.)

ERRATA.

T. XVI, 1897, p. 5, ligne 4 en remontant, *au lieu de* limite, *lisez* image.

[B2d]

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES A L'ÉTUDE DES GROUPES [1];

Par M. H. LAURENT.

I. — Groupes de substitutions.

Des substitutions forment un *groupe* quand leurs produits font partie de ces substitutions.

L'ordre d'un groupe est le nombre de ses substitutions. Un groupe peut être d'ordre fini ou infini.

Un groupe d'ordre infini est discontinu, quand la différence de deux de ses substitutions ne peut devenir infiniment petite (c'est-à-dire avoir tous ses éléments infiniment petits); il est continu dans le cas contraire.

Exemples. — La substitution circulaire

$$\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \ldots + \varepsilon_{n1}$$

et ses puissances forment un groupe d'ordre fini. Les substitutions échangeables $f(s)$ forment un groupe continu, les substitutions à coefficients entiers forment un groupe discontinu.

Soient $s_1, s_2, \ldots, s_p$ des substitutions, leurs puissances et leurs produits forment un groupe dit *groupe dérivé de* $s_1, s_2, \ldots, s_p$.

Nous allons étudier quelques groupes.

[1] *Voir* 3e série, t. XV, 1896, p. 345 : *Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions linéaires.*

II. — Groupe orthogonal.

La substitution $s = \Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij}$, où

$$y_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_2 = \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \ldots + \alpha_{nn} x_n,$$

est orthogonale, quand on a identiquement

$$(1) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 \ldots y_n^2.$$

Il est facile de voir alors que l'on a : 1°

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \ldots + \alpha_{in}^2 = 1, \\ \alpha_{i1} \alpha_{j1} + \alpha_{i2} \alpha_{j2} + \ldots + \alpha_{in} \alpha_{jn} = 0. \end{cases}$$

2° Si les relations ont lieu, (1) a lieu et la substitution est orthogonale.

3° On a

$$x_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{21} y_2 + \ldots + \alpha_{n1} y_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x_n = \alpha_{1n} y_1 + \alpha_{2n} y_2 + \ldots + \alpha_{nn} y_n;$$

donc

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \alpha_{ji}}, \qquad A = \Sigma \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \ldots \alpha_{nn}.$$

4° $A = \Sigma \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \ldots = \pm 1$, car $A^2 = 1$, en vertu de (2). Nous n'insisterons pas sur ces résultats qui sont bien connus.

La substitution $\Sigma \gamma_{ij} \tau_{ij}$ est dite *gauche* quand on a $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$, sans que l'on ait forcément $\gamma_{ii} = 0$. Voici comment on peut déduire une substitution orthogonale d'une substitution gauche. Considérons la substitution gauche $\Sigma \gamma_{ij} \tau_{ij}$ où $\gamma_{ii} = 1$, et posons

$$x_1 = \gamma_{11} t_1 + \gamma_{12} t_2 \ldots + \gamma_{1n} t_n,$$
$$x_2 = \gamma_{21} t_1 + \ldots\ldots\ldots + \gamma_{2n} t_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = \gamma_{n1} t_1 + \ldots\ldots\ldots + \gamma_{nn} t_n.$$

puis

$$y_1 = \gamma_{11} t_1 + \gamma_{21} t_2 + \ldots + \gamma_{n1} t_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$y_n = \gamma_{1n} t_1 + \gamma_{2n} t_2 + \ldots + \gamma_{nn} t_n;$$

l'élimination des t donne

$$\begin{vmatrix} x_1 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1n} \\ x_2 & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \ldots & \gamma_{nn} \\ y_i & \gamma_{1i} & \gamma_{2i} & \ldots & \gamma_{ni} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\alpha_{j1} x_1 + \alpha_{j2} x_2 + \ldots + \alpha_{jn} x_n = y_i,$$

en posant

$$\begin{cases} \alpha_{ij} = \dfrac{1}{\Gamma}\left(\dfrac{\partial\Gamma}{\partial\gamma_{ji}}\gamma_{1i} + \dfrac{\partial\Gamma}{\partial\gamma_{j2}}\gamma_{2i} + \ldots\right); \\ \Gamma = \Sigma \pm \gamma_{11}\gamma_{22} \ldots \gamma_{nn}, \end{cases}$$

ou, en vertu de $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$ et $\gamma_{ii} = 1$,

$$\alpha_{ij} = -\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\gamma_{j1}}\gamma_{i1} + \frac{\partial\Gamma}{\partial\gamma_{j2}}\gamma_{i2} + \ldots\right) + \frac{2}{\Gamma}\frac{\partial\Gamma}{\partial\gamma_{ij}};$$

ou enfin

$$\alpha_{ij} = \frac{2}{\Gamma}\frac{\partial\Gamma}{\partial\gamma_{ji}}, \qquad \alpha_{ii} = -1 + \frac{2}{\Gamma}\frac{\partial\Gamma}{\partial\gamma_{ii}}.$$

Or il est facile de constater que l'on a

$$\alpha_{1i} y_1 + \alpha_{2i} y_2 + \ldots + \alpha_{ni} y_n = x_i,$$

de sorte que la substitution $s = \Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij}$ est orthogonale ; en appelant G la substitution $\Sigma \gamma_{ij} \tau_{ij}$, on a donc

$$s = \frac{2}{G} - 1, \qquad G = \frac{2}{s+1};$$

cette formule suppose seulement G de déterminant différent de zéro.

Cette méthode pour la formation des substitutions orthogonales est due à M. Brioschi.

On sait aussi comment la théorie des polynomes du second degré peut fournir des substitutions orthogonales, mais moins simplement.

Les substitutions orthogonales forment un groupe, qui est le groupe orthogonal. En effet, si

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11} y_1 + \ldots + \alpha_{1n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = \beta_{11} z_1 + \ldots + \beta_{1n} z_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

sont deux substitutions orthogonales, on aura

$$x_1^2 + x_2^2 \ldots = y_1^2 + y_2^2 + \ldots = z_1^2 + z_2^2 \ldots,$$

ce qui prouve bien que la substitution qui donne les x en fonction des z est orthogonale.

Le lecteur vérifiera facilement que l'équation caractéristique d'une substitution gauche G a ses racines imaginaires et qu'il en est de même de l'équation caractéristique d'une substitution orthogonale; d'ailleurs cette dernière équation est réciproque (bien entendu, si l'équation est de degré impair, elle a une racine réelle).

Le groupe orthogonal dérive d'un certain nombre de substitutions simples de la forme

$$\omega = 1 - 2(\tau_{ii} + \tau_{jj}) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (\tau_{ij} - \tau_{ji}) \sin \varphi.$$

Cette substitution peut aussi se mettre sous la forme

$$\tau_{11} + \tau_{22} + \ldots + \tau_{nn} + (\tau_{ii} + \tau_{jj}) \cos \varphi + (\tau_{ij} - \tau_{ji}) \sin \varphi$$

(τ_{ii} et τ_{jj} ne figurant pas dans les premiers termes), et l'on voit alors immédiatement qu'elle est orthogonale.

En multipliant entre elles $\frac{n(n-1)}{2}$ substitutions telles que ω, on introduit $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres qui permettent d'identifier le produit avec une substitution orthogonale quelconque.

Parmi les substitutions orthogonales figurent les substitutions de lettres telles que

$$\tau_{\alpha\beta} + \tau_{\beta\gamma} + \ldots + \tau_{\nu\alpha}.$$

Le groupe des substitutions de lettres est contenu dans le groupe orthogonal : le premier est d'ordre fini, le second est d'ordre infini et continu.

Proposons-nous de trouver toutes les fonctions qui restent inaltérées par les substitutions du groupe orthogonal [c'est-à-dire telles que

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots, \alpha_{21} x_1 + \ldots),$$

$\Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij}$ désignant une substitution orthogonale quelconque]. Une pareille fonction ne sera pas altérée par une substitution orthogonale simple; on devra donc avoir

$$F(x_1, x_2, \ldots) = F(x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi, x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi, \ldots).$$

Posons

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \qquad F_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2}, \qquad \ldots,$$

on aura, en différentiant par rapport à φ,

$$0 = F_1(-x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi) + F_2(x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi),$$

et en posant $\varphi = 0$

$$0 = x_2 F_1 - x_1 F_2.$$

Ainsi, on devra avoir

$$\frac{1}{x_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2} \frac{\partial F}{\partial x_2} = \ldots = \frac{1}{x_n} \frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Les fonctions F et $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ ont donc leurs dérivées proportionnelles ; donc F est fonction de $x_1^2 + x_2^2 + \ldots$; donc les seules fonctions qui restent inaltérées par les substitutions orthogonales sont fonctions de

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Considérons maintenant une fonction F de deux séries de variables, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$; pour qu'elle reste invariable par une même substitution orthogonale effectuée sur les deux systèmes de variables, il faudra que

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2, \ldots, x_i; y_1, y_2, \ldots) \\ & \quad = F(x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi,\ x_1 \sin\varphi \\ & \quad + x_2 \cos\varphi, \ldots, y_1 \cos\varphi - y_2 \sin\varphi, \ldots), \end{aligned}$$

ou que, en posant

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad F_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad F'_1 = \frac{\partial F}{\partial y_1}, \quad F'_2 = \frac{\partial F}{\partial y_2}, \quad \ldots,$$

on ait

$$\begin{aligned} & F_1(-x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi) + F_2(x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi) \\ & \quad + F'_1(-y_1 \sin\varphi - y_2 \cos\varphi) + F'_2(y_1 \cos\varphi - y_2 \sin\varphi) = 0, \end{aligned}$$

et pour $\varphi = 0$

$$x_2 F_1 - x_1 F_2 + y_2 F'_1 - y_1 F'_3 = 0,$$

ou

$$x_2 \frac{\partial F}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial F}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial F}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial F}{\partial y_2} = 0.$$

Pour intégrer cette équation on pose

$$\frac{dx_1}{x_2} = -\frac{dx_2}{x_1} = \frac{dy_1}{y_2} = -\frac{dy_2}{y_1};$$

les intégrales de ces équations sont

$$x_1^2 + x_2^2 = a, \qquad y_1^2 + y_2^2 = b, \qquad x_1 y_1 + x_2 y_2 = c;$$

on en conclut que F est fonction de $x_1^2+x_2^2$, $y_1^2+y_2^2$; $x_1y_1+x_2y_2$ et plus généralement F est fonction de

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2,\quad y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2,$$
$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n.$$

III. — Groupe symétrique.

J'appellerai *substitution symétrique* une substitution $\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}$ dans laquelle $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$ et $\alpha_{ii}=\alpha_{jj}$, et par conséquent dont le déterminant est symétrique. Les substitutions symétriques de degré n forment évidemment un groupe.

L'équation caractéristique d'une substitution symétrique est une équation bien connue et qui a toutes ses racines réelles quand les α_{ij} sont réels. Les pivots étant désignés par $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{n1}$; $\gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{n2}, \ldots$, la substitution $\Sigma\gamma_{ij}\,\tau_{ij}$ est orthogonale. Si l'on pose

$$\Gamma=\Sigma\pm\gamma_{11}\gamma_{22}\ldots\gamma_{nn},$$

on sait que

$$\gamma_{ij}=\frac{1}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{d\gamma_{ji}},$$

et par suite les substitutions interpolaires de $\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}$ seront données par les formules

$$\xi_p=\Sigma\tau_{ij}\gamma_{ip}\gamma_{pj}.$$

Toute substitution symétrique est évidemment un produit de facteurs de la forme λ et $1+\lambda(\tau_{ij}+\tau_{ji})$; une fonction invariable par les substitutions du groupe symétrique ne devra donc pas changer en multipliant ses variables par λ; elle devra donc être homogène de degré zéro; on devra avoir en outre, en appelant $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cette fonction,

$$f(x_1,\ldots,x_i+\lambda x_j,\ldots,x_j+\lambda x_i,\ldots)=f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots),$$

ou

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} x_j + \frac{\partial f}{\partial x_j} x_i = 0, \qquad \ldots$$

et en général, en appelant P le symbole

$$\frac{\partial}{\partial x_i} x_j + \frac{\partial}{\partial x_j} x_i = \mathrm{P},$$

$$\mathrm{P}f = 0, \qquad \mathrm{P}^2 f = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{P}_i f = 0, \qquad \ldots$$

Si $\mathrm{P}f$ est satisfaite, les autres formules le seront aussi; l'intégrale générale de (1) est

$$f = \mathrm{F}(x_i^2 - x_j^2);$$

on en conclut que les fonctions qui admettent le groupe symétrique sont des fonctions homogènes des différences $x_1^2 - x_2^2$, $x_1^2 - x_3^2$, $\ldots$, $x_{n-1}^2 - x_n^2$.

IV. — Groupe cyclique.

J'appellerai *substitution cyclique* une substitution s qui, avec ses puissances, formera un groupe d'ordre fini. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on trouve, dans la suite $1, s, s^2, \ldots, s^\alpha, \ldots$, deux puissances égales : soit

$$s^\alpha = s^\beta \qquad \text{ou} \qquad s^\alpha - s^\beta = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$s^\beta (s^{\alpha-\beta} - 1) = 0.$$

Si nous excluons le cas où le déterminant de s est nul, s ne représentant pas une substitution proprement dite, nous trouvons

$$s^{\alpha-\beta} - 1 = 0;$$

donc toute substitution cyclique s satisfait à une équa-

tion binome

$$s^m - 1 = 0.$$

Proposons-nous de trouver les fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ admettant une pareille substitution. Soit f une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots x_n$ et (sf), $(s^2 f) \ldots$, les valeurs que prend f quand on effectue sur les variables la substitution s, s^2, ..., c'est-à-dire quand on y remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par $x_1 \alpha_{11} + x_2 \alpha_{12}, \ldots;$ $x_1 \alpha_{21} + x_2 \alpha_{22}, \ldots;$ il est clair que la fonction

$$f + (sf) + (s^2 f) + \ldots (s^{n-1} f)$$

et en général toute fonction symétrique de f, (sf), ..., restera invariable par la substitution s.

Parmi les substitutions qui jouissent de la propriété de satisfaire à une équation binome, et qui ont ce que l'on appelle un *ordre fini*, il y a lieu de distinguer les substitutions de lettres. Ainsi, en particulier, la substitution circulaire

$$\tau_{12} + \tau_{23} + \ldots + \tau_{n1}$$

satisfait à l'équation $s^n - 1 = 0$.

V. — Groupe des puissances d'une substitution.

Proposons-nous de trouver les fonctions qui admettent une substitution linéaire donnée de degré n, et, par suite, ses puissances qui forment un groupe. Je suppose que la substitution en question s ait été mise sous la forme

$$s = s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2 + \ldots + s_n \xi_n,$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ désignant ses interpolaires et $s_1, s_2, \ldots$ les racines de l'équation caractéristique ; supposons que la

substitution ξ_i change

$$\begin{array}{lll} x_1 & \text{en} & a_{11}^{i} x_1 + a_{12}^{i} x_2 + \ldots + a_{1n}^{i} x_n, \\ x_2 & \text{en} & a_{21}^{i} x_1 + a_{22}^{i} x_2 + \ldots + a_{2n}^{i} x_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array}$$

comme on a

$$s^r = s_1^r \xi_1 + s_2^r \xi_2 + \ldots + s_n^r \xi_n,$$

la substitution s^r changera

$$\begin{array}{lll} x_1 & \text{en} & \sum_i a_{11}^{i} s_i^r x_1 + \sum_i a_{12}^{i} s_i^r x_2 + \ldots, \\ x_2 & \text{en} & \sum_i a_{21}^{(i)} s_i^r x_1 + \sum_i a_{22}^{(i)} s_i^r x_2 + \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

En définitive, s^r change

$$\begin{array}{lll} x_1 & \text{en} & s_1^r X_{11} + s_2^r X_{12} + \ldots + s_n^r X_{1n} = x_1^{(r)}, \\ x_2 & \text{en} & s_1^r X_{21} + s_2^r X_{22} + \ldots + s_n^r X_{2n} = x_2^{(r)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

X_{ij} désignant des fonctions linéaires bien déterminées.

Soit A_r une fonction linéaire de $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots$; la série dont le terme général est

$$\frac{1}{A_r + \frac{1}{A_r}}$$

sera évidemment convergente pour les valeurs des variables qui n'annulent pas $A_r + \frac{1}{A_r}$, si tous les s ne sont pas de module égal à un et sa valeur sera une des formes de la fonction cherchée.

Autrement : la substitution $s = \Sigma \alpha_{ij} \tau_{ij}$ peut se mettre sous une forme remarquable; en effet, elle permet d'exprimer les nouvelles variables en fonction des an-

ciennes, au moyen des formules

$$y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n,$$
$$y_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

ou en appelant $s_1, s_2, \dots$ les racines supposées inégales de l'équation caractéristique

$$y_1 - s_1x_1 = (\alpha_{11} - s_1)x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots,$$
$$y_2 - s_1x_2 = \alpha_{21}x_1 + (\alpha_{22} - s_1)x_1 + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

on tire de là

$$(y_1 - s_1x_1)\frac{\partial A}{\partial(\alpha_{11} - s)} + (y_2 - s_1x_2)\frac{\partial A}{\partial\alpha_{12}} + \dots = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

A désignant le premier membre de l'équation caractéristique. Mais, en appelant

$$\begin{array}{cccc} x_{11}, & x_{12}, & \dots, & x_{1n}, \\ x_{21}, & x_{22}, & \dots, & x_{2n}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \end{array}$$

les pivots, ces équations reviennent à

$$(y_1 - s_1x_1)x_{11} + (y_2 - s_1x_2)x_{12} + \dots + (y_n - s_1x_n)x_{1n} = 0,$$
$$(y_1 - s_2x_1)x_{21} + (y_2 - s_1x_2)x_{22} + \dots + (y_n - s_2x_n)x_{2n} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Soit alors $F(y_1, y_2, \dots, y_n)$ une fonction admettant la substitution s; on peut, au moyen d'un changement de variables, la mettre sous la forme

$$f(y_1x_{11} + y_2x_{12} + \dots, y_1x_{21} + y_2x_{22} + \dots\dots),$$

ou

$$f(Y_1, Y_2, \dots, Y_n),$$

et si l'on suppose

$$X_i = x_1x_{i1} + x_2x_{i2} + \dots + x_nx_{in}.$$

on devra avoir

$$f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = f(s_1 X_1, s_2 X_2, \ldots, s_n X_n).$$

Ainsi le problème est ramené à trouver une fonction admettant la substitution

$$Y_1 = s_1 X_1, \qquad Y_2 = s_2 X_2, \qquad \ldots, \qquad Y_n = s_n X_n,$$

ce qui revient à dire que, si l'on pose

$$Z_i = \log Y_i,$$

la nouvelle fonction admettra la substitution qui change

$$Z_i \quad \text{en} \quad Z_i + \log s_i,$$

et qu'elle sera périodique : elle admettra en effet les périodes

$$\begin{array}{ccccc} 2\pi\sqrt{-1}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & 2\pi\sqrt{-1}, & 0, & \ldots, & 0, \\ .., & \ldots\ldots.. & .., & \ldots, & .. \end{array}$$

En outre, quand on augmentera x_1 de $\log\operatorname{mod} s_1$, x_2 de $\log\operatorname{mod} s_2$, etc., elle ne changera pas de valeur, mais cela ne constitue qu'un seul système de périodes; la fonction transformée possède donc seulement $n+1$ systèmes de périodes simultanées.

On peut généraliser les considérations précédentes en se proposant de trouver une fonction admettant un groupe de substitutions permutables entre elles. Ces substitutions ont un même système de pivots et, en effectuant sur la fonction un changement de variables analogue à celui que nous venons de faire, les substitutions que la fonction admettra seront de la forme

$$Y_1 = s_1^{\alpha} t_1^{\beta} \ldots X_1, \qquad Y_2 = s_2^{\alpha} t_2^{\beta} \ldots X_2, \qquad \ldots,$$

et en posant

$$Z_i = \log Y_i,$$

la fonction transformée admettra les périodes simultanées

$$\begin{matrix} 2\pi\sqrt{-1}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, \\ \ldots\ldots, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 2\pi\sqrt{-1}, \end{matrix}$$

et

$$\begin{matrix} \log \operatorname{mod} s_1, & \log \operatorname{mod} s_2, & \ldots, \\ \log \operatorname{mod} t_1, & \log \operatorname{mod} t_2, & \ldots, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots, & \ldots \end{matrix}$$

Toutes les substitutions échangeables à une substitution donnée se ramènent à des fonctions linéaires et homogènes de n d'entre elles. La fonction qui admet un groupe dérivé de n substitutions échangeables aura pour transformée une fonction à $2n$ périodes.

Si l'on considère toutes les fonctions à n variables, sans points essentiels et possédant $2n$ périodes (et l'on sait que ces périodes ne sont pas arbitraires), toutes ces fonctions seront liées algébriquement à n d'entre elles.

Cela posé, soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction admettant $n-1$ substitutions échangeables à une substitution donnée; supposons sa transformée $2n$ fois périodique sans points essentiels. Soit

$$Pf = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots\right) f;$$

il est aisé de voir que Pf, $P^2 f$, ... admettent les mêmes substitutions que f; donc f, Pf, ..., $P^n f$ sont liées entre elles par une équation algébrique. D'ailleurs, une équation

$$F(f, P^2 f, P^3 f, \ldots) = 0$$

est invariable quand on fait subir à $x_1, x_2, \ldots$ une substitution linéaire.

VI. — Groupe des substitutions à coefficients entiers.

Les substitutions à coefficients entiers forment évidemment un groupe ; les facteurs primaires de ces substitutions sont de la forme $1+\tau_{ij}$, si nous faisons abstraction des substitutions de la forme λ où λ est un nombre. Si l'on considère la série dont le terme général est

$$\frac{1}{(1+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_n x_n)^{n+1}},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant tous les entiers possibles, cette série sera convergente, car l'intégrale

$$\int\int\int_0^\infty \cdots \frac{d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n}{(1+\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x_n)^{n+1}}$$

est finie, excepté pour des valeurs particulières de x_1, $x_2, \ldots, x_n$; de plus, il est facile de voir que, par une substitution de la forme $1+\tau_{ij}$, elle ne change pas de valeur.

Considérant, en particulier, le cas où $n=2$, il donne la série double

$$\begin{array}{cccccccc}
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \dfrac{1}{1} & + & \dfrac{1}{(1+y)^3} & + & \dfrac{1}{(1+2y)^3} & & \ldots, \\
\ldots & \dfrac{1}{(1+x)^3} & + & \dfrac{1}{(1+x+y)^3} & + & \dfrac{1}{(1+x+2y)^3} & & \ldots, \\
\ldots & \dfrac{1}{(1+2x)^3} & + & \dfrac{1}{(1+2x+y)^3} & + & \dfrac{1}{(1+2x+2y)^3} & & \ldots. \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

VII. — Essai de généralisation.

Le problème le plus général que l'on puisse se poser sur la théorie des substitutions linéaires est le suivant :

Étant données deux ou plusieurs substitutions, existe-t-il une fonction admettant ces substitutions ?

D'abord, il est facile de voir qu'il n'existe pas de fonction admettant toutes les substitutions que l'on peut faire avec ses variables, car elle devrait admettre la substitution $1 + \lambda \tau_{ij}$, c'est-à-dire rester invariable quand on change x_i en $x_i + \lambda x_j$, quel que soit λ ; on devrait donc avoir, en appelant f cette fonction

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

et, par suite, f serait constant.

En général, pour qu'une fonction f admette un groupe G de substitutions linéaires, il faut que ce groupe G ne contienne pas de substitution infinitésimale, c'est-à-dire de la forme $1 + \varepsilon$, ε désignant une substitution dont tous les éléments sont infiniment petits. En effet, si f admettait une pareille substitution, on aurait

$$f(x_1, x_2, \ldots) = f(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \ldots),$$

les quantités δx_1, δx_2, ... désignant des fonctions linéaires des x à coefficients infiniment petits. On devrait donc avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \delta x_2 + \ldots = 0,$$

quels que soient x_1, x_2, ..., x_n et, par suite, quels

que soient δx_1, δx_2, ..., on devrait donc avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \qquad \ldots \qquad \text{où} \qquad f = \text{const.}$$

Cette conclusion suppose, bien entendu, que f ne possède pas une infinité de valeurs pour chaque système de valeurs des variables.

La première question à résoudre est donc celle-ci :

Étant données deux ou plusieurs substitutions, reconnaître si le groupe qui en dérive présente des substitutions innfiitésimales.

Dans le cas où le groupe considéré ne contient pas de substitutions infinitésimales, en appelant s_1, s_2, ... ses substitutions, il faudra voir s'il existe une fonction $\psi(x_1, x_2, \ldots)$, telle que

$$(1) \qquad \Sigma\, \psi(s_i x_1, s_i x_2, \ldots)$$

représente une série convergente, $s_i x_p$ désignant le résultat de la substitution s_i effectuée sur x_p. Si une pareille fonction existe, la série (1) représentera une fonction admettant les substitutions du groupe.

Ce premier problème présente déjà de grandes difficultés que je n'ai pas la prétention de lever entièrement, mais dont il est facile de préciser l'ordre. Nous avons vu, en effet, que toutes les substitutions de degré x étaient des fonctions entières de deux autres $s = \Sigma \varepsilon_i \tau_{ii}$ et $t = \tau_{12} + \tau_{23} \ldots + \tau_{n1}$, jouissant de ces propriétés fondamentales,

$$s^n = 1, \qquad t^n = 1, \qquad st = \varepsilon ts.$$

L'expression générale des substitutions d'un groupe peut donc être obtenue sous forme d'un polynome entier en s et t de degré $n - 1$ par rapport à chacune des

substitutions s et t. Ainsi la solution du premier problème dépend d'un calcul purement algébrique et essentiellement élémentaire, ce qui ne veut pas dire facile à effectuer dans le cas général.

A côté du problème général dont nous venons de parler, viennent se placer d'autres problèmes aussi généraux, mais souvent plus faciles à résoudre, tel que celui-ci :

Étant donnés plusieurs systèmes de n variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$; $\ldots$, on effectue sur ces systèmes une même substitution linéaire. Quelles sont les fonctions de toutes ces variables qui restent invariables quand on effectue cette substitution?

Sur les progressions des divers ordres.

Cauchy appelle *progression arithmétique d'ordre p* une série limitée ou illimitée dont le terme de rang n est une fonction entière de degré p, et *progression géométrique d'ordre n* une série dont le terme général est de la forme $e^{\varphi(n)}$, $\varphi(n)$ étant une fonction entière de degré p.

Considérons une progression géométrique d'ordre p de la forme

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \ldots + x_n\varphi_n + \varphi_0},$$

$\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ désignant des fonctions entières d'ordre p de ν. Une fonction telle que f n'existera pas, bien entendu, pour toutes les valeurs de ses variables, car il faut que certaines conditions de convergence soient satisfaites. Laissons pour un moment ces conditions de convergence de côté et supposons-les satisfaites; effectuons la substitution $\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}$ sur les variables $x_{11}, x_2, \ldots, x_n$:

le terme général de la série f a pour nouvel exposant

$$(x_1\alpha_{11}+x_2\alpha_{12}+\ldots)\varphi_1+(x_1\alpha_{21}+x_2\alpha_{22}+\ldots)\varphi_2+\ldots+\varphi_0;$$

le terme de rang $\nu+1$ avant la substitution avait pour exposant :

$$x_1\varphi_1(\nu+1)+x_2\varphi_2(\nu+1)+\ldots+\varphi_0(\nu+1);$$

la différence de ces exposants est un polynome de degré p en ν qui sera indépendant de ν. Si l'on annule les coefficients de $\nu, \nu^2, \ldots, \nu^p$, ces coefficients sont fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et pour qu'ils soient nuls il faut que les coefficients des x le soient eux-mêmes. On aura ainsi pn équations pour déterminer les n^2 quantités α_{ij} et les $n(p+1)$ coefficients des φ. Il en résulte qu'en général il y aura des fonctions qui seront multipliées par une exponentielle de la forme e^L, où L est une fonction linéaire des x, quand on effectuera sur les variables une substitution linéaire donnée, et même plusieurs substitutions linéaires; et ces fonctions seront représentées par des progressions géométriques.

Nous examinerons en détail un cas simple, celui où les fonctions φ sont du second degré. Nous poserons

$$\varphi_i=a_i\nu^2+b_i\nu+c_i$$

et nous poserons toujours

$$f=\sum e^{x_1\varphi_1+\ldots+x_n\varphi_n+\varphi_0};$$

après la substitution, le terme de rang n devient

$$\begin{aligned}&(x_1\alpha_{11}+x_2\alpha_{12}\ldots)(a_1\nu^2+b_1\nu+c_1)\\&\quad+(x_1\alpha_{21}+x_2\alpha_{22}\ldots)(a_2\nu^2+b_2\nu+c_2)+\ldots;\end{aligned}$$

le terme de rang $\nu+1$ était

$$x_1[a_1(\nu+1)^2+b_1(\nu+1)+c_1]+x_2[a_2(\nu+1)^2+\ldots]+\ldots.$$

la différence des termes indépendants de ν est de la forme

$$\left.\begin{array}{l} c_1(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots) + c_2(\alpha_{21}x_1 + \ldots) + \ldots \\ \quad - x_1(a_1 + b_1 + c_1) - x_2(a_2 + b_2 + c_2) - \ldots \end{array}\right\}$$

et il faut poser

$$\left.\begin{array}{l} (x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{12} + \ldots)a_1 + (x_1\alpha_{21} + x_2\alpha_{22} + \ldots)a_2 + \ldots \\ \quad - a_1x_1 - a_2x_2 - \ldots \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} (x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{12} + \ldots)b_1 + (x_1\alpha_{21} + \ldots)b_2 + \ldots \\ \quad - x_1(2a_1 + b_1)\, x_2(2a_2 + b_2) - \ldots \end{array}\right\} = 0:$$

ces équations donnent

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} (\alpha_{11} - 1)a_1 + \alpha_{21}a_2 + \ldots + \alpha_{2n}a_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}a_1 + a_{2n}a_2 + \ldots + (\alpha_{nn} - 1)a_n = 0, \end{array}\right.$$

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} (\alpha_{11} - 1)\,b_1 - \alpha_{21}b_2 + \ldots + \alpha_{2n}c_n = 2a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{12}b_1 + \alpha_{2n}b_2 + \ldots + (\alpha_{nn} - 1)s_n = 2a_n. \end{array}\right.$$

Ces $2n$ équations laissent $n^2 - 2n$ des α arbitraires; la fonction f se trouvera alors multipliée par des exponentielles e^{l_1}, e^{l_2}, ... où l_1, l_2, ... seront des fonctions linéaires quand on effectuera certaines substitutions sur les variables.

Pour que la fonction f existe il faut que la série qui la définit soit convergente; or, dans cette série, le rapport d'un terme au précédent est

$$e^{\Sigma(2a_i\nu + a_i + b_i)x_i}$$

et si la partie réelle de $\Sigma(2a_i\nu \pm a_i \pm b_i)x_i$ reste négative pour $\nu = +\infty$ la série sera convergente : la fonction f n'existera donc pas pour toutes les valeurs des variables.

La considération des fonctions que nous venons de

trouver peut conduire, par de simples divisions, à des fonctions admettant une substitution donnée.

[M³5a]

SUR LES SURFACES QUI ONT POUR GÉNÉRATRICES LES CORDES D'UNE CUBIQUE GAUCHE;

PAR M. CH. BIOCHE.

1. Il est facile d'obtenir l'équation générale des surfaces réglées dont les génératrices sont les cordes d'une cubique gauche. Soient

$$Q = 0, \qquad Q' = 0, \qquad Q'' = 0$$

les équations de trois quadriques contenant la cubique, les équations

$$(1) \qquad Q' = \lambda Q, \qquad Q'' = \mu Q$$

représentent deux quadriques qui se coupent suivant la cubique considérée et une corde quelconque de cette cubique. Un raisonnement classique conduit à voir que l'équation générale des surfaces engendrées par une corde s'obtient en éliminant λ et μ entre les équations (1) et une équation de condition en λ et μ. Autrement dit, l'équation cherchée est

$$(2) \qquad F(Q, Q', Q'') = 0,$$

F étant une fonction homogène.

2. Si F est de degré K en Q, Q', Q'', l'équation (2) est de degré $2K$. La cubique est ligne multiple d'ordre K sur la surface correspondante; car, si l'on prend pour

origine un point de la cubique, l'équation de la surface n'a évidemment pas de termes de degré inférieur à K.

Inversement, si une surface d'ordre $2K$ admet une cubique gauche comme ligne de degré de multiplicité K, cette surface est engendrée par des cordes de la cubique; car par chaque point de la surface passe une corde de la cubique, et cette corde a $2K+1$ points en évidence sur la surface.

En particulier, pour $K=2$, on retrouve la surface lieu des cordes appartenant à un complexe linéaire.

3. La relation entre le degré de multiplicité de la cubique et l'ordre d'une surface dont les génératrices seraient des cordes de la cubique, peut permettre de déterminer l'ordre de certaines surfaces. Ainsi la surface lieu des cordes qui sont divisées harmoniquement par une quadrique admet la cubique comme ligne triple, puisque par chaque point passent les cordes qui joignent ce point aux points d'intersection de son plan polaire avec la cubique. La surface est donc du sixième ordre.

[A3a]

THÉORÈMES SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

Par M. SONDAT.

Si l'équation

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varphi(x) = ax^n + nbx^{n-1} \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{1.2}cx^{n-2}\ldots + nkx + l = 0, \end{aligned}\right.$$

de degré *pair* et à coefficients binomiaux, a $\frac{n}{2}+1$ racines égales, l'une des conditions de multiplicité est

$$\Delta = 0,$$

Δ étant une fonction homogène et du second degré des coefficients $a, b, c, \ldots, k, l$, obtenue en remplaçant dans φ les puissances décroissantes de x par $l, k, h, \ldots, b, a$, c'est-à-dire en écrivant

$$(2) \qquad \Delta = al - nbk + \frac{n(n-1)}{1.2} ch - \ldots - nbk + al.$$

Posons, en effet,

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi_1 = ax^{n-1} - (n-1)bx^{n-2} + \ldots - k, \\ \varphi_2 = ax^{n-2} - (n-2)bx^{n-3} + \ldots + k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_{n-2} = ax^2 - 2bx + c, \\ \varphi_{n-1} = ax - b. \end{cases}$$

φ_1, φ_2 étant les dérivées successives de φ, divisées respectivement par $n, n(n-1), \ldots$.

Dans l'expression (2) de Δ, remplaçons $a, b, c, \ldots, k, l$ par $a, \varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \ldots, \varphi_1, \varphi$ et soit Δ' le résultat de la substitution.

Nous aurons

$$\Delta' = a\varphi - n\varphi_{n-1}\varphi_1 + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}} \varphi^2_{\frac{n}{2}} \ldots + a\varphi.$$

Or

$$\frac{d\Delta'}{dx} = 0,$$

car, en formant la dérivée, on obtient, d'après (3), des termes qui s'entre-détruisent deux à deux. Donc Δ' est

indépendant de x. De plus,

$$(4) \qquad \Delta' = \Delta,$$

puisque, si l'on fait $x = 0$, les termes de Δ' deviennent ceux de Δ.

Cela posé, si l'équation (1) a $\frac{n}{2} + 1$ racines égales à ρ, en attribuant à x cette valeur ρ, on annule $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{\frac{n}{2}}$. Les termes de Δ' sont donc tous nuls, et par suite (4)

$$\Delta = 0.$$

[K22d]

SUR LE BIAIS PASSÉ GAUCHE;

PAR M. A. BOULANGER,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Je me propose de résoudre deux problèmes relatifs à cette surface bien connue (*voir*, par exemple, MANNHEIM, *Cours de Géométrie descriptive*, 30e Leçon).

I. — *Détermination du volume limité par le biais, par les murs de tête et par le plan des naissances.*

Ce volume est limité par deux bases parallèles semi-circulaires et latéralement par des portions de surfaces gauches; il est donc donné par la formule

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S_3),$$

où S_1 et S_2 sont les aires des bases semi-circulaires, h leur distance et S_3 l'aire de la section faite à égale distance des deux bases (APPELL, *Mécanique rationnelle*, 7e Leçon autographiée).

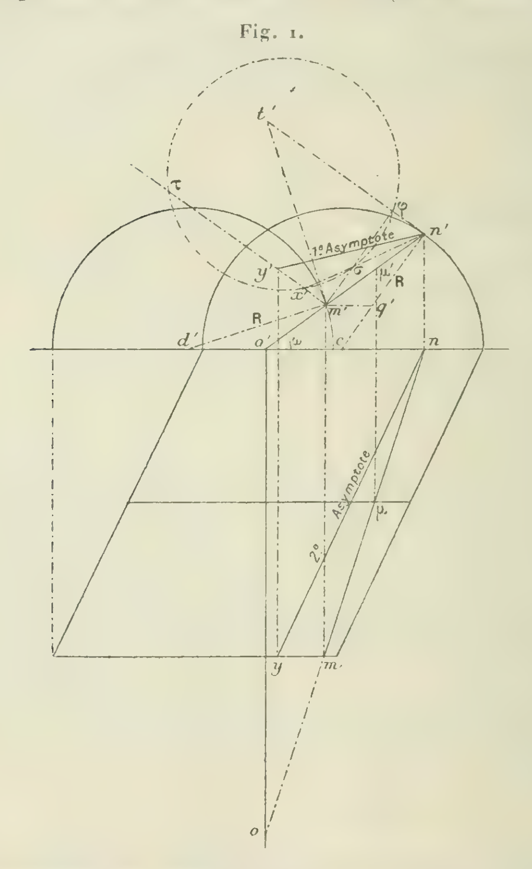
On a

$$S_1 = S_2 = \frac{\pi R^2}{2},$$

en désignant par R le rayon des cercles directeurs.

La question est de calculer S_3. Soit $(omn,\ o'm'n')$ une

Fig. 1.



génératrice de la surface; elle coupe le plan moyen au point (μ, μ'). Cherchons le lieu du point μ'.

Soit $o'\mu' = \rho$, $\widehat{\mu' o' n'} = \omega$; c étant la distance com-

mune des centres des cercles à la directrice rectiligne, on a

$$2\rho = o'm' + o'n',$$

$$R^2 = c^2 + \overline{o'm'}^2 - 2c.o'm'\cos\omega,$$

$$R^2 = c^2 + \overline{o'n'}^2 + 2c.o'n'\cos\omega.$$

L'élimination de $\overline{o'm'}$ et de $\overline{o'n'}$ entre ces trois relations donne sans difficulté

$$\rho^2 = R^2 - c^2\sin^2\omega.$$

La section moyenne est donc une quartique bicirculaire unicursale, *indépendante de l'écartement des bases;* sa surface au-dessus du plan des naissances est

$$S_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^2 - c^2\sin^2\omega)\,d\omega$$

ou

$$S^3 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(2R^2 - c^2) + c^2\cos 2\omega]\,d\omega = \frac{\pi}{4}(2R^2 - c^2).$$

Par suite,

$$V = \frac{\pi h}{6}[3R^2 - c^2].$$

C'est cette formule simple que je voulais signaler.

II. — *Détermination graphique de l'indicatrice en un point* P *de la surface du biais.*

La génératrice G du point P est une première asymptote de l'indicatrice; la seconde asymptote est la génératrice (autre que G) de l'hyperboloïde osculateur au biais le long de G, et il suffit, pour déterminer cet

hyperboloïde, d'avoir les asymptotes relatives à trois points; par exemple, aux points de rencontre de G avec les directrices M, N, O.

Au point O, la seconde asymptote de l'indicatrice est évidemment la directrice rectiligne.

Passons au point N, par exemple. D'après le théorème des tangentes conjuguées de Dupin, quand le point N se déplace sur le cercle de tête, la caractéristique Γ du plan tangent en N est conjuguée, par rapport aux asymptotes de l'indicatrice, de la direction NT du déplacement de N. Donc, l'asymptote demandée sera (en projection comme dans l'espace) la quatrième droite du faisceau harmonique formé par les droites NT, G et Γ.

Par suite, il suffira de construire la caractéristique Γ et, à cet effet, de déterminer le point X où la trace du plan tangent en N au biais, sur le plan de la seconde directrice circulaire par exemple, touche son enveloppe. Cette trace est la parallèle à NT menée par N. Les cercles de tête étant de front, la question est ramenée au problème de Géométrie plane suivant :

Par le milieu o' de la droite des centres de deux circonférences égales (*fig.* 1), on mène une droite $o'm'n'$ coupant ces circonférences en m' et n' (d'un même côté de o'). Par m', on mène une parallèle à la tangente $n't'$ au cercle rencontré en n'. Quel est le point de contact x' de cette parallèle avec son enveloppe, quand la sécante $o'm'n'$ pivote?

Supposant même qu'il s'agisse de deux courbes quelconques, soit $o'm'_1n'_1$ un rayon vecteur infiniment voisin de $o'm'n'$ (*fig.* 2). La parallèle à la tangente en n_1 rencontre en ξ la droite relative à m'. Il faut trouver la limite x' du point ξ.

ε étant l'angle de contingence de la courbe (n'), le

triangle $\xi m' m'_1$ donne

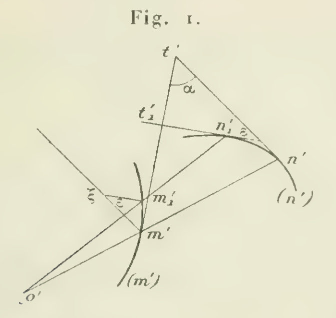
$$m'\xi = \frac{m'm'_1}{\sin\varepsilon} \times \sin \widehat{\xi m'_1 m'}.$$

On en déduit

$$m'x' = \frac{d(m')}{d(n')} r \sin\alpha,$$

en désignant par r le rayon de courbure de (n') en n', par α l'angle des tangentes en m' et n' à (m') et (n'),

Fig. 1.



par $d(m')$ et $d(n')$ les différentielles des arcs de ces courbes. Or, d'après la formule de Newton (*voir* Bour, *Cinématique*, p. 58), on a

$$\frac{d(m')}{d(n')} = \frac{o'm' \times t'm'}{o'n' \times t'n'}.$$

Donc, enfin,

$$m'x' = t'm' \sin\alpha \times \frac{o'm'}{o'n'} r \times \frac{1}{t'n'}.$$

De là résulte, dans le cas qui nous occupe, la construction suivante (*fig.* 1) :

Par m', on mène l'horizontale $m'q'$ jusqu'à sa rencontre q' avec le rayon $c'n'$ de n'; on projette m' en φ sur $n't'$; on porte $m'\sigma$ équipollent à $c'q'$ et $m'\tau$ équipol-

lent à $n't'$. Le point x' est déterminé par le cercle circonscrit au triangle $\varphi\sigma\tau$.

En effet,

$$m'\sigma = c'q' = \frac{o'm'}{o'n'} \times r;$$

$$m'\varphi = t'm' \sin\alpha,$$

$$m'\tau = n't',$$

et l'on a

$$m'x' = \frac{m'\sigma \times m'\varphi}{m'\tau}.$$

La seconde asymptote de l'indicatrice s'obtiendra dès lors immédiatement en portant sur la direction $m'\tau$ un segment $x'y'$ égal à $m'x'$, et en rappelant le point y' en y sur le plan de front du point m.

La droite $(ny, n'y')$ est l'asymptote cherchée.

On répéterait la construction pour le point M et, l'hyperboloïde osculateur étant connu, la seconde asymptote en un point quelconque P de G ou OMN, s'obtiendrait par le tracé habituellement employé pour définir le plan tangent en P (Mannheim, *loc. cit.*).

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE NOVEMBRE 1896. — COMPOSITIONS.

Grenoble.

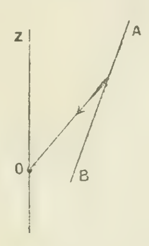
Analyse. — I. *Lignes de courbure de la surface enveloppe du plan mobile défini par l'équation*

$$Z = uX + vY - a\sqrt{1 + u^2 + v^2} + b\sqrt{1 + v^2},$$

dans laquelle u et v sont deux paramètres arbitraires.

II. *Équation en coordonnées ponctuelles et définition géométrique de la surface considérée.*

Mécanique. — *Un tube rectiligne indéfini* AB, *à section infiniment petite, tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe fixe* Oz *en engen-*



drant un hyperboloïde de révolution dont O *est le centre. Un point matériel* M, *dont la masse est égale à l'unité, glisse sans frottement dans l'intérieur du tube et est attiré par le centre* O *proportionnellement à la distance, le coefficient d'attraction étant égal à μ. On demande le mouvement du point* M, *dont on définira la position sur* AB *par sa distance ρ au point où* AB *perce le cercle de gorge. On donne l'angle α de* AB *avec* Oz *et le rayon a du cercle de gorge.*

Après avoir discuté le cas général, on examinera le cas particulier suivant :

A l'instant initial, le point M *est dans le plan du cercle de gorge, avec une vitesse absolue parallèle à* Oz, *et l'on a $\mu = \omega^2 \sin^2 \alpha$. Quelle est, dans ce cas, la projection de la trajectoire absolue de* M *sur le plan du cercle de gorge?*

Astronomie. — *Calculer l'anomalie excentrique,*

l'anomalie vraie, la longitude dans l'orbite et les longitude et latitude héliocentriques de la planète Mars, pour le 20 *février* 1878, *à midi, temps moyen de Paris.*

Données.

Au 20 *février* 1878, *on a*

$$\Omega = 48^\circ 36' 56'', 87, \qquad e = 19241'', 8,$$
$$\omega = 333^\circ 25' 16'', 53, \qquad i = 1^\circ 51' 1'', 6,$$
$$n = 1886'', 5184;$$

et au midi, temps moyen de Paris, du 1[er] *janvier* 1878, *on a, pour la longitude moyenne,*

$$m_0 = 66^\circ 35' 44'', 3.$$

Montpellier.

Analyse. — Première question : *Intégrer l'équation différentielle*

$$x(x+a)\left(\frac{d^2y}{dx^2} - m^2y\right) - (2x+a)\left(\frac{dy}{dx} - my\right) = x^2 e^{-mx}.$$

Le premier nombre s'annulant pour $y = e^{mx}$ on peut poser

$$y = e^{mx}\int z\,dx,$$

ce qui donne l'équation

$$x(x+a)\left(\frac{dz}{dx} + 2mz\right) - (2x+a)z = x^2 e^{-2mx},$$

le premier membre s'annule pour $z = cx(x+a)e^{-2mx}$. En posant

$$z = ux(x+a)e^{-2mx},$$

on a

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{(x+a)^2}, \qquad u = c - \frac{1}{x+a},$$

$$y = e^{mx}\int x(cx + a - 1)e^{-2mx}\,dx$$

$$= c'e^{mx} + c''\left(x^2 + x\frac{am+1}{m} + \frac{am+1}{2m^2}\right)e^{-mx} + \frac{2mx+1}{4m^2}e^{-mx},$$

Seconde question : *Calculer la différence des deux intégrales*

$$\int_0^\infty \frac{x^4 + x^2(a+b)^2 - a^2b^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\cos(x^2)\,dx$$

$$- \frac{ab\sqrt{2}}{a-b}\int_1^\infty \left(a\frac{a^2+x^2}{a^4+x^4} - b\frac{b^2+x^2}{b^4+x^4}\right)e^{-x^2}\,dx.$$

Formons $\int \frac{z^4 + z^2(a+b)^2 - a^2b^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} e^{z^2 i}\,dz$ le long d'un contour composé de la partie positive de l'axe OX, d'un quart de cercle de rayon très grand et de la bissectrice de l'angle YOX. L'intégrale totale est nulle, celle prise sur l'arc de cercle tend vers o si le rayon R devient infini, car son module est plus petit que

$$\frac{R^4 + R^2(a+b)^2 + a^2b^2}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\omega}\,R\,d\omega$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\omega}\,R\,d\omega < \int_0^\theta e^{-R^2\sin 2\omega}\,R\,\frac{\cos 2\omega}{\cos 2\theta}\,d\omega + e^{-R^2\sin 2\theta}\int_\theta^{\frac{\pi}{4}} R\,d\omega$$

$$= \frac{1 - e^{-R^2\sin 2\theta}}{2R\cos 2\theta} + \left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)R\,e^{-R^2\sin 2\theta},$$

expression qui tend vers o avec $\frac{1}{R}\cdot$ On a alors

$$\int_0^\infty \frac{x^4 + x^2(a+b)^2 - a^2b^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} e^{x^2 i}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{-x^4 + x^2 i(a+b)^2 - a^2b^2}{(a^2+x^2 i)(b^2+x^2 i)}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,e^{-x^2}\,dx$$

et, en égalant les parties réelles,

$$\int_0^\infty \frac{x^4 + x^2(a+b)^2 - a^2b^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \cos(x^2)\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^8 + 2abx^6 - x^4(a^2+b^2)(a-b)^2 - 2x^2a^2b^2(a^2+ab+b^2) - a^4b^4}{(a^4+x^4)(b^4+x^4)\sqrt{2}} e^{-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx - ab\sqrt{2}\int_0^\infty \frac{x^6 - a^3b^3 + x^2(x^2-ab)(a^2+ab+b^2)}{(a^4+x^4)(b^4+x^4)} e^{-x^2}\,dx$$

équation qui peut encore s'écrire

$$\int_0^\infty \frac{x^4 - x^2(a+b)^2 - a^2b^2}{(x^2+a^2)(x^2-b^2)} \cos(x^2)\,dx$$

$$- \frac{ab\sqrt{2}}{a-b}\int_0^\infty \left(a\,\frac{a^2-x^2}{a^4+x^4} - b\,\frac{b^2+x^2}{b^4-x^4}\right) e^{-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

MÉCANIQUE. — *Une barre rectiligne, infiniment mince, homogène et pesante,* AB, *est mobile dans un plan vertical fixe. Son extrémité inférieure* A *est assujettie à décrire sans frottement une barre fixe horizontale, et chacun de ses points est sollicité par une force verticale, dirigée en sens contraire de la pesanteur, égale au produit de la masse du point par la distance de celui-ci à la barre fixe.*

1° *Déterminer les positions d'équilibre de la barre.*

2° *La barre étant horizontale, on lui imprime la rotation* ω *autour du point* A, *qui est laissé immobile, de manière qu'elle se dirige au-dessus de la barre fixe, puis on l'abandonne aux forces qui la sollicitent. Étudier le mouvement de la barre et déterminer la trajectoire de l'un quelconque de ses points.*

1° Il y a équilibre lorsque les forces ont une résultante passant par A, ou lorsque la somme de leurs mo-

ments par rapport à A est nulle. Soit θ l'angle de la barre avec l'horizontale, l sa longueur, m la masse de l'unité de longueur et x la distance de l'un de ses points M à l'extrémité A. On aura l'équation

$$mgl\frac{l\cos\theta}{2} = \int_0^l x\sin\theta\, x\cos\theta\, m\,dx = m\sin\theta\cos\theta\frac{l^3}{3},$$

$$\cos\theta(2l\sin\theta - 3g) = 0;$$

il y a équilibre lorsque la barre est verticale ou lorsque $\sin\theta = \frac{3g}{2l}$, ce qui ne peut avoir lieu que si $l > \frac{3g}{2}$.

2° La barre est soumise à un poids $-mgl$, à une force verticale égale à

$$\int_0^l x\sin\theta\, m\,dx = \frac{m}{2}l^2\sin\theta,$$

et à la réaction verticale R du point A. Le centre de gravité restera sur la même verticale, et son mouvement donne l'équation

$$\frac{ml^2}{2}\frac{d^2\sin\theta}{dt^2} = R - mgl + \frac{m}{2}l^2\sin\theta.$$

Pour déterminer le mouvement autour du centre de gravité, il faut calculer le moment d'inertie par rapport à ce point

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} mx^2\,dx = \frac{ml^3}{12};$$

la somme des moments, par rapport au centre de gravité des forces verticales, est

$$\int_0^l mx\sin\theta\left(x - \frac{l}{2}\right)\cos\theta\,dx = m\frac{l^3}{12}\sin\theta\cos\theta.$$

Le mouvement autour du centre de gravité, dans le

plan vertical, est donc déterminé par l'équation

$$\frac{ml^3}{12}\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{ml^3}{12}\sin\theta\cos\theta - \mathrm{R}\frac{l}{2}\cos\theta.$$

En éliminant R, on a

$$\frac{l}{12}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{l}{4}\cos\theta\left[\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$
$$= -\frac{g}{2}\cos\theta + \frac{l}{3}\sin\theta\cos\theta$$

ou

$$l\cos\theta\left[\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\frac{d\theta}{dt} + \frac{l}{3}\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$
$$= \left(\frac{2}{3}l\sin2\theta - 2g\cos\theta\right)\frac{d\theta}{dt},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{l}{4}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\left(\cos2\theta + \frac{5}{3}\right) - \frac{l}{3}\cos2\theta + 2g\sin\theta = \frac{2}{3}l\omega^2 + \frac{l}{3},$$

le second membre étant déduit des conditions initiales

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{\sin^2\theta - \frac{3g}{l}\sin\theta + \omega^2}{1 - \frac{3}{4}\sin^2\theta}}.$$

θ augmente jusqu'à $\sin\theta = \frac{3g}{2l} - \sqrt{\left(\frac{3g}{2l}\right)^2 - \omega^2}$. Mais cette valeur de θ n'est réelle que si $\omega < \frac{3g}{2l}$, et, dans le cas où $\frac{3g}{2l} > 1$, il faut, en outre, que $\omega^2 > \frac{3g}{l} - 1$. Donc $\frac{d\theta}{dt}$ peut devenir nul si $l > \frac{3g}{2}$ et $\omega < \frac{3g}{2l}$, ou si $l < \frac{3g}{2}$ et $\frac{3g}{2l} > \omega > \sqrt{\frac{3g}{l} - 1}$; la barre revient ensuite à la position horizontale par un mouvement inverse.

Si, au contraire, $\omega > \frac{3g}{2l}$, ou lorsque $l < \frac{3g}{2}$ si

$\omega < \sqrt{\frac{3g}{l}} - 1$, $\frac{d\theta}{dt}$ ne peut pas s'annuler, et θ varie de 0 à π.

La trajectoire des points de la barre s'obtient en remarquant que le milieu décrit une droite verticale, et l'extrémité A une horizontale, ce qui ramène la question à un problème classique ; les divers points décrivent des arcs d'ellipses.

Astronomie. — *Le 15 novembre 1896 l'étoile τ de la Couronne a pour ascension droite* $16^h 10^m 47^s,82$, *et pour déclinaison boréale* $34^\circ 7' 8'',6$. *Calculer :* 1° *les heures sidérales du lever et du coucher de cet astre à l'Observatoire de Paris, dont la latitude boréale est* $48^\circ 50' 11''$, *et l'azimut de l'étoile au moment où elle traverse le plan de l'horizon.*

Rennes.

Analyse. — Première question : *La fonction* $F(z)$, *holomorphe dans tout le plan, satisfait aux deux relations*

$$F(z + \omega) = F(z),$$

$$F(z + \omega') = e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(2z + \omega)} F(z);$$

trouver le nombre et la somme de ses zéros, enfermés dans le parallélogramme (ω, ω') *dont le sommet initial est un point quelconque du plan.*

Seconde question : *Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces qui admettent comme lignes de courbure les sections faites par des plans parallèles au plan* xOy.

Transformer cette équation en prenant x comme fonction, y et z comme variables indépendantes.

Intégrer l'une ou l'autre de ces équations.

Mécanique. — *Un cylindre elliptique, limité par deux sections droites, pesant, homogène et libre, se meut en restant constamment vertical, de manière que son axe instantané décrive uniformément sa surface et a pour lieu absolu un cylindre égal. Ces deux cylindres se touchent, au début du mouvement, par les génératrices passant aux extrémités des grands axes de leurs sections droites. Exprimer, en fonction de la distance des axes des deux cylindres et de l'angle des axes de leurs sections droites, la résultante et le couple résultant, réduit sur le centre de gravité des forces motrices capables de ce mouvement.*

Discuter les résultats obtenus.

On adoptera avec avantage, pour fixer la position de la génératrice de contact des deux cylindres, l'angle formé par le grand axe d'une section droite de l'un des cylindres avec le plan tangent commun aux deux cylindres.

On trouvera le couple moteur proportionnel à une puissance simple de la distance des axes des deux cylindres.

Astronomie. — *Calculer la distance angulaire de deux astres dont les coordonnées équatoriales sont, pour le premier astre,*

$$\mathcal{R} = 16^h\ 9^m 45^s.23, \qquad \mathcal{D} = -16^\circ\ 2'51''.2,$$

pour le second astre,

$$\mathcal{R}' = 19^h 45^m 13^s.04, \qquad \mathcal{D}' = \quad 8^\circ 34' 20''.1.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1696.

(1895, p. 37).

Le triangle $A_1B_1C_1$ *étant inscrit homologiquement dans* ABC, *si l'on mène par* A *une droite quelconque rencontrant* A_1C_1 *en* B_2 *et* A_1B_1 *en* C_2 :

1° *Les droites* BC_2 *et* B_2C *se coupent en* A_2 *sur* B_1C_1 ;

2° *Les trois triangles* ABC, $A_1B_1C_1$ *et* $A_2B_2C_2$ *sont homologiques deux à deux, ou l'on a*

$$(\text{centre } O)\left|\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix}\right|(\text{axe } \chi),$$

$$O_1\left|\begin{matrix} A & B & C \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix}\right|\chi_1, \qquad O_2\left|\begin{matrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{matrix}\right|\chi_2.$$

3° *Les centres* O, O_1, O_2 *appartiennent respectivement aux axes* χ_1, χ_2, χ ;

4° *Il existe trois coniques :*

La première tangente aux côtés de ABC *en* A_1, B_1, C_1 *et à* χ_1 *en* O.

La deuxième tangente aux côtés de $A_1B_1C_1$ *en* A_2, B_2, C_2 *et à* χ_2 *en* O_1.

La troisième tangente aux côtés de $A_2B_2C_2$ *en* A, B, C *et à* χ *en* O_2.

(P. SONDAT).

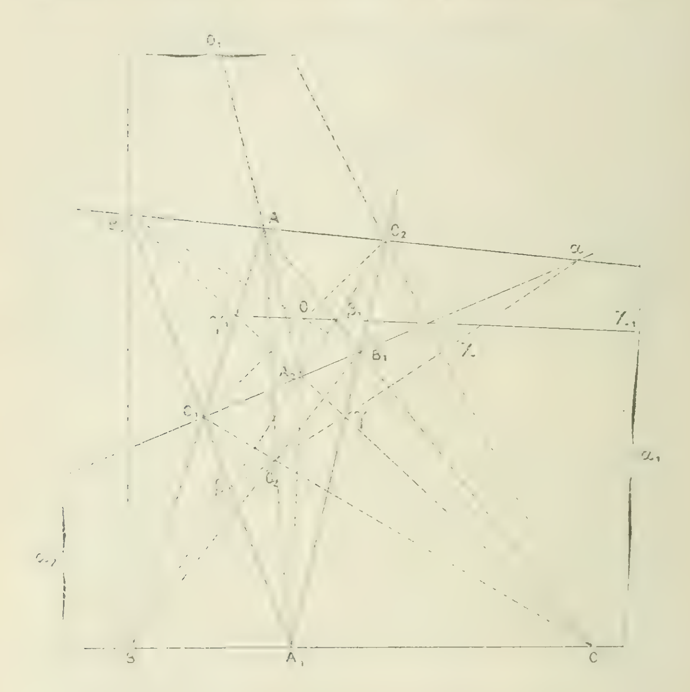
SOLUTION

Par M. A. DROZ-FARNY.

1° $B_1ACB_2A_1C_2$ est un hexagone inscrit dans une conique dégénérée; sa pascale étant $C_1B_1A_2$, ces trois points sont en ligne droite.

2° et 3°. Représentons par α le point de coupe des côtés B_1C_1 et B_2C_2, par α_1 celui des côtés BC et B_2C_2, par α_2 celui de BC et B_1C_1 et soient de même les points β, β_1 et β_2, γ, γ_1 et γ_2 pour les intersections des autres paires de côtés.

La ponctuelle $A_1 \beta_1 C_1 B_2$ est en perspective avec $A_1 C_2 B_1 \gamma_1$ par rapport au centre A_2 : donc aussi $(A_1 \beta_1 C_1 B_2) = (A_1 \gamma_1 B_1 C_2)$.



Ces deux ponctuelles homographiques ayant le point A_1 commun sont perspectives : les trois droites $\beta\gamma$, $C_1 B_1$, $B_2 C_2$ se croisent en α. Les deux triangles $A_1 B_1 C_1$ et $A_2 B_2 C_2$ sont donc homologiques d'axe $\alpha\beta_1\gamma_1 = \chi$ et par conséquent $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ concourent au point O.

$C_1 C A_2 B B_1 A$ est un hexagone inscrit dans une conique dégénérée; sa pascale étant

$$\left.\begin{matrix} C_1 A_1 \\ A_2 B \end{matrix}\right| \beta_1 \quad \left.\begin{matrix} C_1 C \\ B_1 B \end{matrix}\right| O_2 \quad \left.\begin{matrix} B_1 A_1 \\ A_2 C \end{matrix}\right| \gamma_1.$$

O_2 se trouve sur $\beta\gamma$ ou sur l'axe χ.

Les ponctuelles $\alpha_2 B A_1 C$ et $A_2 B C_2 \beta_1$ sont perspectives de centre B_1, de même $\alpha_2 B A_1 C$ et $B_2 \gamma_1 B_2 C$ sont perspectives de

centre C_1, donc

$$(A_2 B C_2 \beta_1) = (A_2 \gamma_1 B^2 C).$$

ou

$$(A_2 B C_2 \beta_1) = (A_2 C B_2 \gamma_1).$$

Ces deux ponctuelles ayant le point A_2 en commun sont homologiques; donc : BC, $B_2 C_2$, $\beta_1 \gamma_1$ se croisent en α_1.

Les deux triangles ABC et $A_2 B_2 C_2$ sont donc homologiques d'axe $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 = \chi_1$. Les trois droites AA_2, BB_2, CC_2 concourent donc en O_1, $B_2 A_2 C_2 C_1 A B_1$ est un hexagone inscrit dans une conique dégénérée ; sa pascale est $\beta_1 \gamma_1 O$; donc O se trouve sur l'axe χ_1.

Enfin $BAC\,C_2 A_1 B_2$ est aussi un hexagone inscrit, dont la pascale est $O_1 \beta_2 \gamma_2$; O_1 se trouve sur l'axe χ_2.

4° Le triangle $A_1 B_1 C_1$ étant inscrit homologiquement dans ABC il existe une conique touchant les côtés de ABC en A_1, B_1, C_1. Mais on voit que, dans tout quadrilatère circonscrit à une conique, les diagonales et les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés se croisent en un même point; appliquons la réciproque de ce théorème au quadrilatère $\beta_1 \gamma_1 BC$ dans lequel $\gamma_1 C$, $\beta_1 B$, OA_1 et $B_1 C_1$ se croisent en A_2 et l'on verra que la conique $A_1 B_1 C_1$ touche aussi l'axe χ_1 en O.

Même démonstration pour les deux autres coniques.

Autres solutions de MM. A. Dardès et G. Gallucci.

Question 1717.

(1896, p. 104).

Le lieu des milieux des cordes d'un cercle ayant une projection donnée sur un diamètre fixe est une quartique. Discuter cette courbe; la construire, en étant donnés deux points, et donner la construction de la tangente en un point quelconque. (Gallucci).

SOLUTION SOMMAIRE

Par M. A. Mannheim.

Sur le diamètre fixe D prenons un segment dont la longueur soit la longueur donnée de la projection d'une quelconque des cordes; de ses extrémités élevons des perpendiculaires à D.

Ces droites coupent le cercle en quatre points, les cordes qui les joignent deux à deux ont pour milieux des points du lieu demandé. Ces points, sur une même perpendiculaire à D, sont au nombre de quatre, et comme il n'y a pas d'autre point du lieu sur cette perpendiculaire, *le lieu est une quartique.*

Prenons une des cordes ab et m son milieu. Des extrémités de cette corde menons des tangentes au cercle. Du point de rencontre de ces tangentes abaissons une perpendiculaire sur D. Cette droite coupe ab au point c. En vertu d'une propriété due à M. R. Godefroy, le symétrique de c par rapport à m est le point où ab touche la courbe E à laquelle toutes les cordes analogues à ab sont tangentes.

Comme le lieu (m) des points tels que m est la podaire de E par rapport au centre o du cercle donné, il résulte tout de suite de là que :

La tangente à (m) en m est la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite oc.

Sur D prenons les projections orthogonales α, μ, β des points a, m, b. Désignons oa par r, om par ρ, $\alpha\beta$ par $2l$ et l'angle μom par ω. On a

$$\mu\alpha = ma \sin\omega,$$

d'où

$$l^2 = (r^2 - \rho^2)\sin^2\omega.$$

l'équation de (m) en coordonnées polaires est donc

$$\rho^2 + \frac{l^2}{\sin^2\omega} = r^2;$$

par suite en coordonnées rectangulaires (m) a pour équation

$$(x^2 + y^2)y^2 + l^2x^2 - (r^2 - y^2)y^2 = 0.$$

Avec ce qui précède, il est très facile de déterminer la forme de la courbe (m). (Nous n'avons pas compris ce que veut dire : la construire, en étant donnés deux points.)

Autre solution par M. G. Gallucci.

Question 1719.

(1896, p. 151.)

Si deux triangles homologiques ABC, $A_1B_1C_1$ *sont inscrits dans la même conique* Q : 1° *Le centre d'homologie* O *est le pôle de l'axe* X; 2° *Les points* (BC_1, B_1C), (AC_1, A_1C), (AB_1, A_1B) *appartiennent à* X *et les droites* (bc_1, b_1c), (ac_1, a_1c), (ab_1, a_1b) *passent en* O : 3° *Si par* O *l'on mène une sécante* Δ, *les droites joignant les sommets de chacun des triangles aux points où les côtés correspondants de l'autre sont coupés par* Δ *sont trois à trois concourantes en deux points* ω, ω_1 *de* Q *et ces deux points sont en ligne droite avec* O; 4° *Les droites joignant un point* Θ *de* X *aux sommets de chacun des triangles coupent les côtés correspondants de l'autre en des points situés trois à trois sur deux droites* ρ, ρ_1 *tangentes à la conique* Q_1 *inscrite aux deux triangles, et ces deux droites se coupent sur* X.

5° *Déduire de là une construction simple de la conique passant par cinq points ou tangente à cinq droites.*

(P. SONDAT).

SOLUTION

Par M. R. GILBERT.

1° Les points (BC, B_1C_1), (AC, A_1C_1), (AB, A_1B_1) situés sur X ont tous trois leurs polaires passant en O; donc X est la polaire de O.

2° Le point (BC_1, B_1C) ayant également une polaire qui passe en O, ce point est sur X. Propriété corrélative, O étant aussi le pôle de X par rapport à Q_1.

3° Prenons un point ω sur Q; les droites ωA, ωB, ωC rencontrent a_1, b_1, c_1 en α, β, γ; je dis que α, β, γ sont sur une droite passant en O; il suffit de montrer que O est sur $\alpha\beta$. Or faisons varier ω sur Q; α, β décrivent sur a_1, b_1 deux divisions homographiques. Mais, lorsque ω vient en C_1, α et β sont confondus en C_1; donc $\alpha\beta$ passe par un point fixe. Or, lorsque ω vient en A_1, α est sur AA_1 et β en A_1 : donc $\alpha\beta$ est AA_1; de même, une position de $\alpha\beta$ est BB_1 : donc O est bien sur $\alpha\beta$. Inversement, considérons une droite Δ coupant a_1, b_1, c_1 en α, β, γ; la droite $A\alpha$ coupe Q en ω, auquel point ω correspondent

les mêmes points β, γ : donc $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ concourent en ω. De même, $A_1\alpha_1$, $B_1\beta_1$, $C_1\gamma_1$ concourent en ω_1. A un point ω correspond une seule droite Δ et un seul point ω_1, et inversement; donc les faisceaux $O\omega$, $O\omega_1$ sont homographiques; or, lorsque ω est en A, on voit que β se confond avec γ_1 en (b_1c), γ avec β_1 en (c_1b) (accessoirement, cela démontre 2°) et par suite, ω_1 est en A_1 : donc les faisceaux, qui d'ailleurs sont réciproques et par suite en involution, ont trois rayons communs et coïncident.

4° Proposition corrélative; même démonstration.

5° On donne les cinq points A, B, C, A_1, B_1; d'où le point O. Les droites c, c_1 et AB_1, A_1B se coupent sur X; d'où C_1. Pour construire un point quelconque, on mène une droite Δ à laquelle correspond un point ω et un point ω_1. La tangente en un point M quelconque s'obtient en considérant les deux triangles MAB, $M_1A_1B_1$, le point ω étant en M.

Autres solutions de MM. G. Gallucci et V. Retali.

Question 1720.

(1896, p. 1[illegible]2).

On sait que, dans un triangle quelconque, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre sont en ligne droite. Étant donné un triangle Δ, on construit la droite dont il vient d'être question, relative à chacun des triangles formés par les points de contact du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits à Δ. Démontrer que les quatre droites ainsi obtenues se coupent au centre du cercle circonscrit à Δ. (J. Franel).

PREMIÈRE SOLUTION.

Par M. F. Farjon.

Appelons L la droite qui dans un triangle joint l'orthocentre au centre du cercle circonscrit. L'un des triangles considérés, inscrit dans le cercle de centre O, et le triangle qui a pour sommets les trois autres points de concours des bissectrices de Δ, sont homothétiques; leurs lignes L sont donc parallèles; de plus elles coïncident, ayant en commun le point O, centre du cercle circonscrit au premier triangle et orthocentre du second. Or les quatre triangles ayant pour sommets les points de con-

cours des bissectrices de Δ pris trois à trois, ont un même cercle de neuf points dont le centre est sur chacune des lignes L considérées, lequel cercle n'est autre que le cercle circonscrit à Δ. Donc, etc.

DEUXIÈME SOLUTION.

Par M. E. Duporcq.

Soit δ un des quatre triangles considérés dans l'énoncé ; soient h son orthocentre et ω le centre du cercle qui lui est circonscrit. Il existe, comme on sait, une conique Γ, admettant pour foyers h et ω, et inscrite au triangle δ. Par polaires réciproques relativement au cercle Ω, la conique Γ se transforme en une circonférence dont le centre est sur la droite $h\omega$, axe de Γ : or cette transformée n'est autre que le cercle circonscrit au triangle Δ, dont les sommets sont, par rapport au cercle Ω, les pôles des côtés du triangle δ. Le théorème se trouve donc démontré.

Autres solutions de MM. A. Droz-Farny et H. Lez.

Question 1724.

(1896, p. 200.)

Démontrer l'identité

$$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \ldots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \ldots & (a-n)^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & (a-1) & \ldots & (a-n) \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1^n 2^{n-1} 3^{n-2} \ldots (n-2)^3 (n-1)^2 n.$$

(A. de Strékalof.)

SOLUTION

Par M. A. Retali.

Appelons Δ le déterminant donné, et posons $a - r = a_r$; nous avons $a_r - a_s = s - r$.

$$\Delta' = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a & a_1 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^n & a_1^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

d'où, par le théorème de Vandermonde,

$$\Delta' = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (a-a_1)\ldots(a-a_{n-1})(a-a_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!(n-1)!\ldots1!,$$
$$(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_{n-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_{n-1}-a_n),$$

$$\Delta = n!(n-1)!\ldots1!$$

Autres solutions par MM. Audibert, L. Bosi, Brand, Emine, G. Tzitzeica.

Questions 1725 et 1726.

(1896, p. 200).

1725. *Si m et n sont deux nombres premiers,*

$$m^{n-1} + n^{m-1} - 1$$

est divisible par mn. (J.-J. Milne.)

1726. *Si m, n et p sont trois nombres premiers,*

$$(np)^{m-1} + (pm)^{n-1} + (mn)^{p-1} - 1$$

est divisible par mnp. (J.-J. Milne.)

SOLUTION

Par M. G. Tzitzéica.

1725. Comme m et n sont premiers, il suffit de montrer que le nombre proposé est divisible par m et n séparément. Or cela est évident, en vertu du théorème de Fermat.

1726. Évidente aussi, d'après le même théorème.

Autres solutions de MM. Audibert, Émine et P. H.

Question 1728.

([illegible]).

Si p est un nombre premier qui ne divise pas x et r un nombre entier quelconque, l'expression $x^{p^r - p^{r-1}} - 1$ *est divisible par p.* (J.-J. Milne.)

SOLUTION

Par M. Émine.

En effet, l'expression proposée peut s'écrire

$$(x^{p^{r-1}})^{p-1} - 1,$$

du moment que x n'a pas le facteur premier p; toutes ses puissances aussi ne l'auront pas. Donc $x^{p^{r-1}}$ n'étant pas divisible par le nombre premier p, d'après le théorème de Fermat, on aura

$$(x^{p^{r-1}})^{p-1} - 1 = Mp.$$

Autres solutions de MM. P. H. et G. Tzitzeica.

Questions 1736 et 1737.

(1896, p. 344.)

Ces deux questions, dont les énoncés déjà anciens se trouvaient dans les archives des *N. A.*, ont été posées sous la signature Wolstenholme, et résolues dans le *J. E.* de M. de Longchamps (1882, p. 95 et p. 189). Il n'en sera donc pas inséré de solutions. Si nous avions connu le fait, nous n'aurions pas publié les énoncés dont il s'agit. La Rédaction.

Question 1743.

(1896, p. 440.)

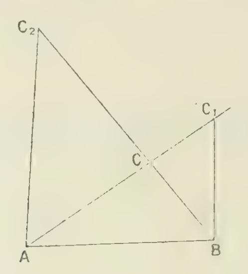
On peut construire six triangles semblables entre eux ayant pour côté commun un segment fixe, et situés d'un même côté de ce segment : les six sommets ainsi obtenus sont sur une même circonférence. Toutes les circonférences ainsi obtenues ont un même axe radical. (E. Duporcq.)

SOLUTION

Par M. Dulimbert.

Soient AB le segment fixe, C un point quelconque du plan. Sur le côté AC, je prends un point C_1 tel que $\overline{AB}^2 = \overline{AC}.\overline{AC_1}$. J'ai un deuxième triangle C_1AB semblable au premier, AB étant homologue de AC_1. Sur le côté BC, je prends un

point C_2 tel que $\overline{AB}^2 = BC.BC_2$. J'obtiens ainsi un troisième triangle C_2AB semblable aux deux autres, AB étant homologue de BC_2. Les trois autres triangles, de sommets C', C'_1



et C'_2, sont symétriques des trois premiers par rapport à la perpendiculaire au milieu de AB. Pour démontrer que le cercle CC_1C_2 passe par les points C', C'_1, C'_2, il suffit de démontrer que son centre est sur cette perpendiculaire.

Je prends AB pour axe des x, l'axe des y passant par C et perpendiculaire sur AB; je désigne par h l'ordonnée du point C, par a et b les abscisses des points A et B. J'ai d'abord

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}_1} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BC}_1} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}_1}$$

ou

$$\frac{a-b}{\mathrm{AC}_1} = \frac{\sqrt{b^2+h^2}}{\mathrm{BC}_1} = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a-b},$$

d'où

$$\mathrm{AC}_1 = \frac{(a-b)^2}{\sqrt{a^2+h^2}}, \qquad \mathrm{BC}_1 = \frac{(a-b)\sqrt{b^2+h^2}}{a^2+h^2}.$$

Les coordonnées x, y du point C s'obtiennent par les proportions

$$\frac{a-x_1}{a} = \frac{(a-b)^2}{a^2+h^2}, \qquad \frac{y_1}{h} = \frac{(a-b)^2}{a^2+h^2},$$

d'où

$$x_1 = \frac{a[a^2+h^2-(a-b)^2]}{a^2+h^2},$$

$$y_1 = \frac{h(a-b)^2}{a^2+h^2}.$$

La perpendiculaire au milieu de CC_1 a donc pour équation

$$h^2 - 2hy = \frac{2ax[a^2 + h^2 - (a-b)^2]}{a^2 + h^2}$$
$$+ \frac{a^2[a^2 + h^2 - (a-b)^2]^2}{(a^2 + h^2)^2}$$
$$- \frac{2hy(a-b)^2}{a^2 + h^2} + \frac{h^2(a-b)^4}{(a^2 + h^2)^2},$$

ou, en ordonnant et supprimant le facteur

$$(a^2 + h^2)[a^2 + h^2 - (a-b)^2],$$
$$2ax - 2hy + b^2 + h^2 - 2ab = 0.$$

De même la perpendiculaire au milieu de CC_2 a pour équation

$$2bx - 2hy + a^2 + h^2 - 2ab = 0.$$

Les coordonnées du centre du cercle sont donc

$$x = \frac{a + b}{2},$$

ce qui démontre la première partie du théorème, et

$$y = \frac{a^2 - ab + b^2 + h^2}{2h}.$$

L'équation du cercle est

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a^2 - ab + b^2 + h^2}{2h}\right)^2$$
$$= \frac{(a+b)^2}{4} + \left(h - \frac{a^2 - ab + b^2 + h^2}{2h}\right)^2.$$

Supposons maintenant que le point C varie, A et B restant fixes. L'équation du cercle devient, en transportant l'origine au point O, milieu de AB,

$$x^2 + y^2 - \frac{y}{h}(a^2 - ab + b^2 + h^2)$$
$$- \frac{(a+b)^2}{4} + a^2 - ab + b^2 = 0.$$

h est arbitraire, la différence $a - b$ est constante et égale à la distance $AB = 2l$. Posons $a + b = 2s$ et faisons $y = 0$. Alors

$$x^2 - s^2 + 4l^2 + s^2 - l^2 = 0,$$

ou

$$x^2 + 3l^2 = 0.$$

ce qui montre que AB est l'axe radical commun de ces cercles. Il en résulte aussi que tous ces cercles sont orthogonaux au cercle qui a le point O pour centre et pour rayon $l\sqrt{3}$ (¹).

Autres solutions de MM. Barisien, Brand, Farjon, Lemoine, Provost, V. Retali, Taratte.

QUESTIONS.

1764. Soit $f(x) = 0$ une équation réciproque de degré $2m$, n'ayant pas de racine commune avec $x^4 - 1 = 0$.

Si l'on pose $x = \frac{\sqrt{y} + 1}{\sqrt{y} - 1}$, l'équation en y est de degré m, et le produit de ses racines est égal à $(-1)^m \frac{f(-1)}{f(1)}$.

Si l'on pose $x + \frac{1}{x} = 2z$, le produit des racines de l'équation transformée est égal à

$$\frac{(-1)^m e^{\frac{m\pi i}{2}}}{2^m} \frac{f(\sqrt{-1})}{f(0)}.$$

Application à l'équation binome. (A. Pellet.)

(¹) En complétant la construction indiquée par M. D., il est évident que les points (A, C, C_1) (A, C', C'_2) (A, C'_1, C_2) (B, C, C_2) (B, C_1, C'_2) (B, C', C'_1) sont respectivement en ligne droite, et que l'on a

$$AC.AC_1 = AC'.AC'_2 = AC'_1.AC_2 = AB^2,$$
$$BC.BC_2 = BC_1.BC'_2 = BC'.BC'_1 = BA^2.$$

Donc les six points considérés sont sur une même circonférence; la puissance de A par rapport à cette circonférence est AB^2, et il en est de même pour celle de B; AB^2 étant indépendant de la forme du triangle ABC, chacun des points A, B a même puissance par rapport à toutes les circonférences dont il s'agit. Donc AB est l'axe radical commun. C.-A. L.

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1897.

Sujet.

Dans ce qui va suivre, nous appellerons :

1° Cubique équilatère *une cubique gauche dont les trois asymptotes sont deux à deux rectangulaires. (Exemple : la cubique des normales à l'ellipsoïde.)*

2° Tétraèdre orthocentrique *un tétraèdre dont les arêtes opposées sont orthogonales. Dans un tel tétraèdre, les hauteurs sont concourantes; le point de concours des hauteurs est aussi le point par lequel passent les perpendiculaires communes aux arêtes opposées; enfin ce tétraèdre est conjugué par rapport à une sphère qui a son centre au point de rencontre des hauteurs.*

Cela posé, on propose de démontrer les propriétés suivantes :

I. Si deux cordes AB, CD d'une cubique équilatère sont orthogonales, le tétraèdre ABCD est orthocentrique.

II. Si une cubique gauche *quelconque* passe par les sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport à une quadrique, elle est circonscrite à une infinité de tétraèdres conjugués par rapport à cette quadrique.

III. Toute cubique équilatère circonscrite à un

tétraèdre orthocentrique passe par le point de rencontre des hauteurs du tétraèdre.

IV. Toute cubique passant par les sommets et le point de rencontre des hauteurs d'un tétraèdre orthocentrique est équilatère.

V. Si l'on coupe une cubique équilatère par une série de plans parallèles, le lieu des points de rencontre des hauteurs des triangles ayant pour sommets les points de rencontre de la cubique et des plans est la sécante double de la cubique normale aux plans sécants.

VI. *Soit* Σ *une sphère de rayon* R *et dont le centre* O *est sur une cubique équilatère. Il existe une infinité de tétraèdres* ABCD *inscrits à la cubique et conjugués par rapport à* Σ.

1° Le lieu des centres de gravité de ces tétraèdres est une droite.

2° On considère les sphères S circonscrites aux tétraèdres ABCD ; le lieu des centres de ces sphères est une droite. — Comment se déplace cette droite lorsque O restant fixe R varie ?

3° Chaque sphère S coupe la cubique en deux autres points E et F. Démontrer que ces points sont fixes et ne dépendent pas de R.

4° Lorsque O varie, la droite EF décrit une quadrique et le plan OEF enveloppe un cône du deuxième degré.

5° Lorsque O varie, le milieu de EF décrit une cubique équilatère.

Conditions.

Le concours est ouvert *exclusivement* aux abonnés des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Le meilleur Mémoire envoyé en réponse au sujet proposé donnera droit, au profit de l'auteur :

1° A un crédit de 100fr d'Ouvrages à choisir dans le catalogue de MM. Gauthier-Villars et fils;
2° A la publication du Mémoire;
3° A un tirage à part gratuit de 100 exemplaires.

Les manuscrits devront être parvenus à la rédaction AVANT LE 1er NOVEMBRE 1897, terme d'absolue rigueur.

Les auteurs pourront, à leur gré, se faire immédiatement connaître, ou garder provisoirement l'anonyme. Dans ce dernier cas, le Mémoire portera un signe, une devise ou un numéro d'ordre arbitraire, et sera accompagné d'un pli cacheté renfermant, avec la même indication, le nom et l'adresse de l'auteur et la justification de sa qualité d'abonné. Les plis cachetés en question ne seront ouverts par la Rédaction qu'à partir du 1er novembre et après le jugement prononcé.

Aucune limite n'est fixée quant à l'étendue des Mémoires; mais, à mérite égal, les plus concis seraient préférés par les juges du Concours. Chacun comprendra du reste que l'insertion d'un travail trop étendu serait matériellement impossible.

Le jugement du Concours sera prononcé avant le 1er décembre 1897, et le résultat en sera, sans retard, publié dans le journal.

La Rédaction, et les juges du Concours qui se seront associés à elle, se réservent la faculté :

1° De partager les récompenses ci-dessus mention-

nées, au cas *tout à fait exceptionnel* où deux Mémoires y auraient droit avec un égal mérite;

2° De ne pas attribuer de récompenses si, parmi les Mémoires envoyés, aucun ne semblait en être digne. Dans ce dernier cas, les avantages stipulés seraient reportés sur un Concours ultérieur, et l'annonce en serait faite dans le journal en temps utile.

L'auteur du Mémoire récompensé sera immédiatement avisé par la Rédaction et voudra bien faire immédiatement connaître s'il désire que la publication de son Travail ait lieu sous son nom, ou sous forme anonyme. Son silence serait interprété comme une autorisation de publier le nom.

LES RÉDACTEURS.

[D5cα]

SUR CERTAINS PROBLÈMES DE REPRÉSENTATION CONFORME;

PAR M. H.-A. SCHWARZ.

Membre de l'Académie royale des Sciences de Berlin,
Membre correspondant de l'Institut.

(Traduit avec l'autorisation de l'auteur par M. L. LAUGEL.)

(Extrait d'une Communication à M. Richelot, de Kœnigsberg. *Journal de Crelle,* t. 70, p. 105-120, février 1869. Reproduit dans le t. II des *Gesammelte Math. Abhandlungen* de M. Schwarz; Berlin, Springer; 1890.)

Le fait, que l'intelligence de la plupart des travaux de *Riemann* ne fut accessible au début qu'à un petit cercle de lecteurs, tient, je le crois volontiers, à ce que *Riemann* a négligé, dans la publication de ses recherches

générales, d'expliquer complètement la nature spéciale de ses méthodes de traitement à l'aide d'une exposition détaillée d'exemples particuliers.

Il en est aussi de même de ce théorème établi dans le n° 21 de la *dissertation inaugurale* de *Riemann*, qui m'a suggéré l'idée générale de traiter certains problèmes de représentation conforme, et qui nous enseigne : qu'il est possible de représenter l'aire d'une figure simplement connexe sur l'aire d'un cercle, en conservant la similitude dans les parties, et cela *d'une seule et unique manière,* telle qu'au centre du cercle corresponde un point intérieur quelconque donné de la figure et, à un point quelconque de la circonférence, un point quelconque donné du contour de la figure.

M. *Mertens,* qui suivait en même temps que moi, pendant le semestre d'hiver 1863-64, les leçons de M. *Weierstrass* sur la théorie des fonctions analytiques, attira à cette occasion mon attention sur cette circonstance caractéristique que *Riemann* avait, d'une manière générale, démontré l'existence d'une fonction qui, par exemple, permet de pratiquer la représentation conforme de l'aire d'un triangle rectiligne plan sur l'aire d'un cercle, tandis que la détermination explicite d'une telle fonction semblait encore, à cause des discontinuités du contour situées aux sommets, dépasser les forces de l'analyse.

Je ne connaissais alors aucun cas particulier d'une aire à contour assigné pour lequel le problème de la représentation conforme de cette aire sur celle d'un cercle eût été mené à bonne fin.

Ayant, comme particularisation de la figure à représenter d'une manière conforme sur l'aire d'un cercle, choisi celle dont le contour est formé par des lignes droites et plus spécialement par les côtés d'un *carré*, je

crois avoir découvert un cas particulier du problème général, cas dont la solution complète même dans cette spécialisation aurait une valeur scientifique et qui serait également bienvenue, comme illustration intuitive du n° 21 de la dissertation de *Riemann*.

On est conduit à la solution de ce problème, ainsi qu'à celle de bien d'autres problèmes de représentation conforme, par le second théorème qui suit :

Lorsque, pour une fonction analytique, à une succession continue de valeurs réelles de l'argument complexe, correspond une succession continue de valeurs réelles de la fonction, alors, à chaque couple de valeurs conjuguées de l'argument correspondent des valeurs conjuguées de la fonction.

Sur le plan (u) dont les points représentent géométriquement les valeurs d'une grandeur complexe u, délimitons une région U′ simplement connexe, dont le contour est en partie formé par un segment fini l de l'axe des quantités réelles dans le plan (u).

Soit $t = f(u)$ une fonction analytique de l'argument complexe u, uniforme par définition, et possédant le caractère d'une fonction entière pour toutes les valeurs de u appartenant à l'intérieur de U′; c'est-à-dire que, u_0 désignant une valeur quelconque de u, appartenant à l'intérieur de la région U′, la fonction $f(u)$ sera pour les valeurs de u, situées dans le domaine de ce point u_0, développable en une série procédant suivant les puissances de la grandeur $u - u_0$, dont les exposants sont des nombres entiers positifs, série convergente pour toutes les valeurs de $u - u_0$ suffisamment petites en valeur absolue. On admettra par hypothèse que lorsque u se rapproche indéfiniment du contour, la valeur de t reste toujours finie et est réelle pour tous les points de la ligne l et que pour toutes les valeurs de

l'argument u appartenant à l'intérieur de la région U′ et à son contour, la valeur de la fonction $t = f(u)$ varie d'une manière continue avec la valeur de l'argument u.

A la région U′ correspond une région U″ dont les points sont les symétriques de ceux de U′, par rapport à l'axe des quantités réelles.

Pour tous les points de la région U″, une fonction analytique t sera donc définie par ce fait que, dans les régions U′ et U″, aux valeurs conjuguées de la grandeur u sont associées des valeurs conjuguées de la grandeur t. Si l'on conçoit les deux régions U′ et U″ raccordées entre elles le long du segment de droite l, on est en présence d'une région simplement connexe U′ + U″. Pour toutes les valeurs de l'argument u appartenant à l'intérieur de cette région, la valeur de la grandeur t est, par définition, uniforme (1) et de plus, pour les valeurs de u appartenant à l'intérieur de U′ ainsi qu'à l'intérieur de U″, elle est définie comme fonction analytique de cet argument et celle-ci possède le caractère d'une fonction entière. A la traversée de la ligne l et le long de cette ligne la valeur de t varie d'une manière continue. De ceci l'on conclut que la fonction t définie pour la région U″ est un prolongement analytique de la fonction définie pour la région U′ et qu'elle est un prolongement analytique de cette dernière au delà de la ligne l. L'exactitude de cette affirmation sera démontrée, comme il suit, au cas où, comme il est permis de le supposer, la région U′ + U″ recouvre partout le plan (u) seulement d'une manière simple (2).

Si l'on désigne par u_0 une valeur de u, appartenant

(1) *i. e* : uni-déterminative, univoque. L. L.

(2) *i. e* : la région est formée par une surface à un seul feuillet. L. L.

à l'intérieur de U', alors, d'après un théorème de *Cauchy*, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(u)}{u - u_0}\, du,$$

lorsqu'elle est prise, dans le sens positif, le long du contour de la région U' ou bien lorsqu'elle est prise le long de celui de la région U'', a dans le premier cas la valeur $f(u_0)$, dans le second la valeur o. Lorsque l'on ajoute entre elles ces deux intégrales, les chemins d'intégration qui sont alors parcourus le long de l deux fois et en sens contraire se détruisent et l'équation

$$f(u_0) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(u)}{u - u_0}\, du,$$

où l'intégrale doit être prise dans le sens positif le long du contour de la région U' + U'', représente, pour toutes les valeurs de la grandeur u_0, qui sont représentés géométriquement par les points appartenant à l'intérieur de cette région, une fonction continue de cet argument dont les valeurs coïncident partout avec celles de la fonction $t = f(u)$.

De là résulte que la fonction ainsi définie possède aussi pour toutes les valeurs de u, appartenant au segment l, le caractère d'une fonction entière.

Par conséquent, sous les hypothèses adoptées, à des valeurs conjuguées de l'argument correspondent des valeurs conjuguées de la fonction, ou bien, si nous employons le langage de la Géométrie : la représentation conforme du plan (u) sur le plan (t), dont les points représentent géométriquement les valeurs de la grandeur complexe t, est symétrique pour les deux plans par rapport aux axes des quantités réelles; à des points symétriques correspondent des points symétriques, images des premiers.

Si maintenant l'on pratique les prolongements analytiques de la fonction $t = f(u)$ symétriquement des deux côtés de l'axe des quantités réelles sur le plan (u), l'on arrive à ce résultat que les points singuliers, quelle que soit leur nature, sont ou bien situés séparément sur l'axe des quantités réelles, ou bien situés symétriquement par paires de part et d'autre de cet axe.

Cette proposition peut s'étendre directement au cas où, dans la représentation par l'entremise d'une fonction analytique, à un segment de droite situé dans la région de l'argument ou formant une partie du contour de ladite région correspond encore un segment de ligne droite dans le plan dont les points représentent géométriquement les valeurs de la fonction analytique.

Dans le problème spécial de la représentation conforme de l'aire d'un carré sur celle d'un cercle, il était donc à présumer que, lorsque l'on prescrit que le centre du cercle doit correspondre au centre du carré, les images des quatre droites qui sont les axes de symétrie du carré pourraient être aussi des lignes droites. Cette considération fournit la position des quatre points singuliers situés sur le contour du cercle qui correspondent dans le cas de ces données spéciales aux quatre sommets du carré.

Maintenant il saute aux yeux que la solution du problème en question peut être simplifiée en remplaçant l'aire du cercle par la surface d'un demi-plan que l'on peut déduire de l'aire du cercle au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques; à vrai dire la simplification introduite ainsi tient à ce fait qu'alors les contours de deux régions dont on doit pratiquer l'une sur l'autre la représentation conforme sont tous deux rectilignes.

D'après la loi générale donnée précédemment, la fonc-

tion par l'entremise de laquelle est praticable la représentation conforme peut donc être prolongée analytiquement au delà de la région intérieure du carré pour laquelle elle est primitivement supposée définie.

Si l'on choisit comme centre de la transformation l'un des points singuliers sur le contour du cercle, on reconnaît que les points de l'axe des quantités réelles

$$t = \infty, \qquad t = -1, \qquad t = 0, \qquad t = +1$$

peuvent être pris comme points singuliers, tandis que le demi-plan situé du côté positif de l'axe des quantités réelles sera la représentation conforme de l'aire du cercle.

Lorsque la position d'un point à l'intérieur du carré donné est déterminée par la valeur de la grandeur complexe u, alors le problème en question exige que la variable t, pour toutes les valeurs de la grandeur u qui correspondent aux points situés à l'intérieur du carré donné, soit définie comme fonction analytique uniforme de l'argument u, possédant le caractère d'une fonction entière et ayant des valeurs réelles pour les valeurs de l'argument u qui correspondent aux points situés sur le contour du carré.

Maintenant, d'après la loi donnée précédemment, la région de l'argument u peut être d'abord étendue aux aires de quatre carrés contigus au carré donné et situés symétriquement par rapport à ce carré et peut ainsi, par répétition successive, être encore étendue à une région aussi grande que l'on veut du plan (u).

On reconnaît ainsi que la fonction t doit de même, pour cette extension du domaine de son argument, être une fonction uniforme pour toutes les valeurs finies de l'argument u, et que, de plus, c'est une fonction doublement périodique de u, le rapport des deux périodes fondamentales étant égal à $\sqrt{-1}$.

On est donc ainsi en présence des fonctions lemniscatiques.

Le contour du carré a des points singuliers en ses quatre sommets. Ces points doivent être exceptés de la condition que l'aire du carré doit être représentée en conservant la similitude en les plus petites parties sur l'aire du cercle ou sur celle du demi-plan, car, autrement, le problème proposé renfermerait une condition impossible à remplir.

Chaque portion de l'aire du carré située dans le voisinage d'un des sommets dudit carré, portion de surface angulaire plane d'ouverture de 90°, voisine du sommet de l'angle, doit être représentée, par l'entremise de la fonction qui fournit la représentation, sur une surface angulaire plane d'ouverture de 180°.

On est donc en présence de ce problème : Trouver la fonction la plus générale par l'entremise de laquelle une portion de surface angulaire d'ouverture $\alpha\pi$ sur le plan (u)

$$u = re^{i\varphi}, \quad 0 < \varphi < \alpha\pi, \quad 0 < r < r_0,$$

située dans le voisinage du sommet $u = 0$, est représentée d'une manière conforme sur le plan

$$t = \rho e^{\psi i}, \quad 0 < \psi < \pi,$$

de telle sorte qu'entre les limites assignées, à chaque point $u = re^{\varphi i}$, corresponde un point $t = \rho e^{\psi i}$ se déplaçant avec le premier d'une manière continue, pendant que l'on a les valeurs respectives correspondantes

$$r = 0, \quad \rho = 0; \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0; \quad \varphi = \alpha\pi, \quad \psi = \pi.$$

La fonction la plus simple par l'entremise de laquelle peut être pratiquée une telle représentation est la fonction

$$t = u^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Chaque autre fonction t de l'argument u, qui permet également de pratiquer une représentation jouissant des propriétés assignées, possède, d'après le théorème précédent, lorsqu'on la regarde comme fonction de la grandeur complexe v, le caractère d'une fonction entière pour la valeur $v = 0$ et pour les valeurs de la grandeur v situées dans le domaine de cette valeur $v = 0$. Et de même, inversement, on reconnaît que la grandeur v est une fonction analytique de l'argument t, qui, pour toutes les valeurs de la grandeur complexe t situées dans le domaine de la valeur $t = 0$, y compris cette dernière valeur, possède le caractère d'une fonction entière.

Par conséquent, on obtient les représentations analytiques suivantes, valables dans les domaines des valeurs $v = 0$ et $t = 0$:

$$v = u^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad t = Cv(1 + a_1 v + a_2 v^2 + \ldots),$$

$$v = \frac{1}{C} t(1 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots),$$

$$u = v^{\alpha}, \qquad u = \frac{1}{C^{\alpha}} t^{\alpha}(1 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots).$$

La constante C est différente de zéro et positive ; les coefficients a, b, c ont tous des valeurs réelles ; ce qui tient à ce qu'à toutes les valeurs positives suffisamment petites des grandeurs respectives u et v doivent aussi correspondre des valeurs positives de la grandeur t.

Dans un problème de représentation conforme, la situation et la grandeur absolue de la figure dans le plan (u), sur lequel est pratiquée la représentation conforme d'une figure donnée sur le plan (t), sont en général indifférentes. Cette circonstance introduit dans la solution générale du problème de représentation deux constantes arbitraires qui déterminent la situation et la grandeur absolue susdites. Ainsi si $u = f(t)$ est une fonction par

l'entremise de laquelle la figure T dans le plan (t) sera représentée sur une figure U dans le plan (u), alors

$$u' = C_1 u + C_2$$

est une pareille fonction; seulement, la figure correspondante U' dans le plan (u') est située en un autre endroit, et construite suivant une autre échelle et à une orientation différente de celle de la figure U sur le plan (u).

Lorsqu'il s'agit alors de trouver les propriétés caractéristiques de la représentation conforme d'une figure T sur une figure U, on doit donc rechercher une dépendance entre les grandeurs u et t qui soit indépendante de la situation particulière et de la grandeur absolue de la figure U sur le plan (u); c'est-à-dire qu'il s'agit d'établir une équation différentielle dans l'intégrale générale de laquelle les constantes C_1 et C_2 se présentent comme constantes d'intégration.

Or, on a

$$\frac{du'}{dt} = C_1 \frac{du}{dt},$$

$$\frac{d}{dt} \log \frac{du'}{dt} = \frac{d}{dt} \log \frac{du}{dt}.$$

Cette fonction, par conséquent, est indépendante de la situation particulière et de la grandeur absolue de la figure U sur le plan (u).

Le passage de u à $\frac{du}{dt}$ et à $\frac{d}{dt} \log \frac{du}{dt}$ est un progrès considérable en ce sens qu'alors toutes les valeurs de l'argument t, pour lesquelles la grandeur $\frac{du}{dt}$ est soit infiniment petite soit infiniment grande et pour lesquelles la grandeur $\frac{d}{dt} \log \frac{du}{dt}$ est infiniment grande, doivent être regardées comme des valeurs singulières dans le problème

de représentation, valeurs pour lesquelles il ne peut donc plus être question de représentation conservant la similitude au sens propre de ces mots.

Dans le cas déjà traité de la représentation conforme d'un angle π sur un angle $\alpha\pi$, on a

$$\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt} = \frac{\alpha-1}{t} + d_1 + d_2 t + \ldots.$$

Cette fonction, par conséquent, dans le domaine de la valeur $t = 0$, possède le caractère d'une fonction rationnelle fractionnaire. Les coefficients d_1, d_2, ... ont tous des valeurs réelles et, par conséquent, la valeur de la fonction $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$, pour toutes ces valeurs réelles de l'argument t pour lesquelles la série converge, est également réelle.

S'agit-il de pratiquer la représentation conforme d'une figure T du plan (t) sur une région U du plan (u) dont le contour est formé par une ligne simple (c'est-à-dire qui ne passe par aucun point plus d'une fois), région située tout entière à distance finie, on sait alors d'avance que la grandeur $\frac{du}{dt}$ ne peut devenir infiniment petite ni infiniment grande pour aucun point situé à l'intérieur de T et que, par suite, la fonction $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$ doit, pour toutes ces valeurs de l'argument t, posséder le caractère d'une fonction entière.

Dans le cas qui nous occupe les valeurs singulières de la grandeur t, situées à distance finie, sont $t = -1$, $t = 0$, $t = +1$; α est égal à $\frac{1}{2}$. La fonction

$$\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}\right),$$

qui, pour toutes les valeurs réelles de l'argument t, possède également des valeurs réelles, a, pour toutes les valeurs finies de t dont la partie imaginaire est positive, le caractère d'une fonction entière ; par conséquent cette fonction possède, pour toutes les valeurs finies de t, le caractère d'une fonction entière. Pour les valeurs infiniment grandes de t, on a le développement

$$u - u_\infty = \frac{C' i}{\sqrt{t}}\left(1 + c_1' \frac{1}{t} + c_2' \frac{1}{t^2} + \dots\right),$$

et, par suite,

$$\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{1}{t} + d_1' \frac{1}{t^2} + d_2' \frac{1}{t^3} + \dots;$$

par conséquent, la fonction $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$, pour toutes les valeurs infiniment grandes de t, devient infiniment petite ; $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$ est donc une fonction rationnelle de t et cette fonction est égale à

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}\right).$$

On obtient alors par intégration

$$\log\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}\log 4t(1-t^2) + \log C_1,$$

$$u = C_1 \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t^2)}} + C_2.$$

On s'aperçoit donc aisément que, par l'entremise de l'intégrale lemniscatique

$$u' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t^2)}},$$

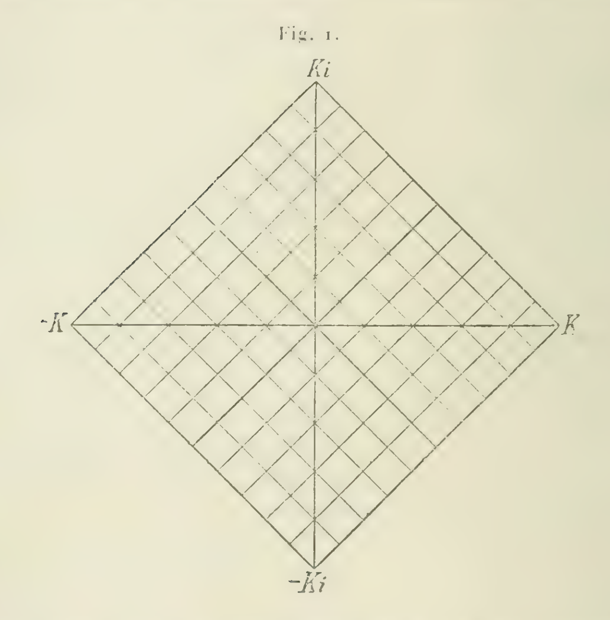
l'aire de chacun des deux demi-plans, en lesquels est

partagé le plan (t) par l'axe des quantités réelles, sera représentée d'une manière conforme sur l'aire d'un carré de côté égal à

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t^2)}}.$$

Au moyen de la substitution $s = \frac{t-i}{t+i}$ l'on passe du

Fig. 1.



demi-plan situé du côté positif de l'axe des quantités réelles sur le plan (t) à l'aire du cercle décrit dans le plan (s) du point $s = 0$ comme centre avec le rayon 1.

Au moyen des fonctions

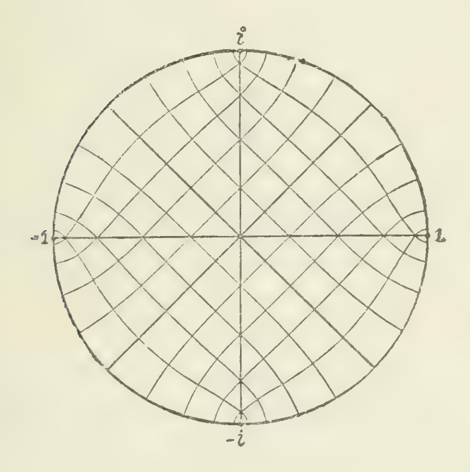
$$u = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}, \qquad s = \sin \operatorname{am} u, \qquad (k = \sqrt{-1}),$$

l'aire du cercle situé sur le plan (s), (*fig.* 2), décrit

avec le rayon 1 du point $s = 0$ comme centre, et l'aire du carré situé sur le plan (u) et dont les sommets sont $K, Ki, -K, -Ki$, avec $K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}$ (*fig.* 1), sont correspondantes et représentables l'une sur l'autre, la similitude étant conservée en les plus petites parties.

Pour rendre cette représentation intuitive à l'aide de

Fig. 2.



figures, j'ai calculé, avec l'approximation requise pour les valeurs de u formées à l'aide de multiples entiers de $\frac{1}{10}K$ et de $\frac{1}{10}Ki$, les valeurs correspondantes de s d'après lesquelles j'ai dessiné les figures [1].

---

(1) Tableau des valeurs que prend la fonction $\sin \operatorname{am} u$ $(k = \sqrt{-1})$ pour les valeurs $u = \frac{m+ni}{10}K$ formées à l'aide de multiples entiers de $\frac{1}{10}K$ et $\frac{1}{10}Ki$ avec $0 \leqq n \leqq m,\ m+n \leqq 10$.

n											
5						0,7071 +0,7071 i					
4					0,5407 +0,5407 i	0,6978 +0,5336 i	0,8633 +0,5047 i				
3				0,3971 +0,3971 i	0,5366 +0,3941 i	0,6792 +0,3815 i	0,8209 +0,3525 i	0,9537 +0,3008 i			
2			0,2627 +0,2627 i	0,3956 +0,2617 i	0,5291 +0,2571 i	0,6608 +0,2455 i	0,7866 +0,2235 i	0,8995 +0,1877 i	0,9906 +0,1367 i		
1		0,1311 +0,1311 i	0,2624 +0,1309 i	0,3934 +0,1299 i	0,5228 +0,1268 i	0,6481 +0,1202 i	0,7649 +0,1084 i	0,8671 +0,0903 i	0,9476 +0,0653 i	0,9994 +0,0344 i	
0	0	0,1311	0,2621	0,3924	0,5205	0,6436	0,7574	0,8563	0,9335	0,9830	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 m

Au moyen de cette représentation, on obtient l'interprétation géométrique qui suit de ce théorème démontré par *Abel* [1] : la valeur de la grandeur $\sin \operatorname{am} \frac{K}{2^n \mp i}$ et d'une manière générale la valeur de la grandeur

$$\sin \operatorname{am} \frac{(p \pm qi)K}{2^{2n} - 1}$$

s'obtient par la résolution d'équations quadratiques, si l'on suppose que le module k a pour valeur $\sqrt{-1}$, que

(1) Comparer *Œuvres d'Abel*, édit. Sylow et Lie, t. I, p. 313-314 ; p. 360-362. T. II, p. 261, 262, 268, et p. 305, ligne 24 à partir d'en haut. L. L.

$2^{2^n}+1$ est un nombre premier, et que p et q désignent deux nombres entiers quelconques.

Chaque point de l'aire du carré en question qui représente géométriquement la valeur de l'une des grandeurs

$$u = \frac{p+qi}{2^{2^n}+1}\mathrm{K}$$

possède cette propriété que le point qui lui correspond sur l'aire circulaire et qui représente géométriquement la valeur de la grandeur $s = \sin \operatorname{am} u$ peut être trouvé au moyen de constructions géométriques qui n'exigent que l'emploi de la règle et du compas.

Si au lieu d'un carré nous avons un rectangle dont les côtés sont entre eux comme $2\mathrm{K}$ et K', alors la représentation conforme du demi-plan T pourra être pratiquée sur un rectangle semblable au rectangle donné par l'entremise de l'intégrale elliptique

$$u = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

lorsque le module k est déterminé à l'aide de l'équation

$$k = 4\sqrt{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^4$$
$$= \left[\frac{2q^{\frac{1}{4}}+2q^{\frac{9}{4}}+2q^{\frac{25}{4}}+\ldots}{1+2q+2q^4+\ldots}\right]^2,$$

où l'on a posé $q = e^{-\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}\pi}$ [1] (¹).

Lorsqu'il s'agit de pratiquer la représentation conforme de l'aire d'un demi-plan T sur celle d'un triangle

(¹) Ce numéro [1], ainsi que d'autres que l'on rencontrera dans le cours du Mémoire, se rapporte aux Notes ajoutées par M. Schwarz dans la Collection de ses Mémoires (Berlin, Springer; 1890) et qui sont reproduites à la fin de cette traduction. L. L.

rectiligne dont les angles sont $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, on obtient, au moyen de déductions tout à fait analogues, la formule suivante, qui permet d'opérer la représentation

$$C_1 u + C_2 = \int_{t_0}^{t} (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1}\, dt.$$

Ici les trois grandeurs réelles a, b, c, qui correspondent aux trois sommets du triangle rectiligne peuvent être choisies arbitrairement, pourvu seulement qu'elles se succèdent le long du contour du demi-plan T, dans le même sens relativement à l'aire de ce plan, que les angles $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ du triangle se succèdent, relativement à l'aire de ce triangle, le long du périmètre de ce dernier.

Ces résultats fournissent la forme de la fonction par l'entremise de laquelle la surface d'un demi-plan peut être représentée, d'une manière conforme, sur l'aire simplement connexe dont le contour est celui d'un polygone rectiligne plan quelconque. Seulement, dans le cas général d'un polygone à n sommets, parmi les n grandeurs réelles a, b, c, d, ..., qui correspondent aux n sommets du polygone rectiligne, trois seulement seront choisies arbitrairement ; les $n-3$ qui restent sont déterminées par les rapports donnés entre les longueurs respectives des côtés du polygone considéré.

Si le polygone est un polygone régulier de n côtés et que l'on remplace la surface du demi-plan par l'aire d'un cercle, alors la représentation de l'aire du cercle sur celle d'un n — gone régulier, les centres des deux figures se correspondant entre eux, sera praticable par l'entremise de la fonction

$$u = \int_0^s \frac{ds}{(1-s^n)^{\frac{2}{n}}}.$$

Ces résultats, que j'indique ici, je les ai exposés au

printemps de l'année 1864, dans le *Séminaire mathématique* de l'Université de Berlin, et les ai présentés, lors de ma « Promotion », à la Faculté philosophique de cette Université.

En août 1866 ils ont été communiqués par M. *Weierstrass* à l'Académie de Berlin.

Relativement au problème de la représentation de l'aire d'un polygone rectiligne sur celle d'un cercle, j'ai eu le plaisir de voir mes recherches se rencontrer avec celles de M. *Christoffel* sur le sujet suivant : *Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie* (*Annali di Matematica*, IIª serie, Tomo I; 1867).

Je suis arrivé à démontrer rigoureusement la possibilité de déterminer les constantes dans le cas $n = 4$. Pour le cas général, je dois une démonstration rigoureuse à une bienveillante Communication de M. *Weierstrass* [2].

La formule indiquée ci-dessus peut être facilement étendue au cas où la surface dont le contour est celui d'un polygone rectiligne renferme, à son intérieur, des points de ramification ou bien le point situé à l'infini sur le plan.

Par exemple, l'aire du cercle sur le plan (s) de centre $s = 0$ et de rayon 1 sera représentée, d'une manière conforme, sur l'aire extérieure à un carré, par l'entremise de la formule

$$u = \int \frac{\sqrt{1 - s^4}}{s^2} ds;$$

au centre $s = 0$ correspond le point situé à l'infini sur le plan (u).

En même temps, on peut donc considérer comme résolu, en principe, le problème de la détermination de

l'état thermique stationnaire sous certaines conditions assignées relativement au contour, dans le cas d'une aire plane s'étendant à l'infini et extérieure à un carré.

On est maintenant près de désirer de voir remplir ce desideratum : obtenir un exemple simple pour la représentation d'une aire à contour formé par une ligne courbe à cours continu sur l'aire d'un cercle ; et quelle figure peut-on choisir préférablement à une ellipse ?

Ici la recherche conduit au but, d'une manière satisfaisante, à l'aide de représentations conformes pratiquées par l'entremise des fonctions analytiques les plus simples.

L'aire sur le plan (u), intérieure à une parabole de foyer $u = 0$ et de sommet $u = 1$, sera représentée, d'une manière conforme, sur l'aire d'un cercle dans le plan (s), de centre $s = 0$ et de rayon 1, par l'entremise de la fonction

$$s = \operatorname{tang}^2\left(\tfrac{1}{4}\pi\sqrt{u}\right).$$

L'aire intérieure à une ellipse dont les foyers sont $u = \pm 1$ et les extrémités des axes $u = \pm a, \pm bi$ sera représentée, d'une manière conforme, par l'entremise de la fonction

$$s = \sin \operatorname{am}\left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{arc} \sin u\right),$$

sur l'aire d'un cercle de centre $s = 0$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{k}}$, lorsque le module k est déterminé à l'aide des équations

$$q = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2,$$

$$k = 4\sqrt{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)\ldots}{(1+q)(1+q^3)\ldots}\right]^4 = \left[\frac{2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + \ldots}\right]^2 \quad [3].$$

La ligne courbe la plus simple est la circonférence.

Dans le problème de la représentation de l'aire d'une figure du plan (u), limitée par des segments d'arcs de cercle, sur la surface d'un demi-plan T, on est conduit au but par une déduction tout à fait analogue à celle qui a été exposée pour la représentation de polygones à contour rectiligne.

Lorsque la figure limitée par des arcs de cercle dans le plan (u) est représentée d'une manière conforme par l'entremise de la fonction

$$u' = \frac{C_1 u + C_2}{C_3 u + C_4},$$

sur un plan (u'), la figure correspondante sur le plan (u') est également limitée par des arcs de cercle parmi lesquels aussi peuvent se présenter des segments rectilignes.

Pour obtenir, une fois pour toutes, toutes ces représentations que l'on peut déduire les unes des autres au moyen de transformations par rayons vecteurs réciproques, on éliminera les constantes C. On a

$$\frac{d}{dt}\log\frac{du'}{dt} = \frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt} - 2\frac{C_3}{C_3 u + C_4}\frac{du}{dt},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\frac{du'}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}\log\frac{du}{dt} + 2\frac{C_3^2}{(C_3 u + C_4)^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\frac{C_3}{C_3 u + C_4}\frac{d^2 u}{dt^2}.$$

Si l'on désigne alors la fonction

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\frac{du}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}\right)^2$$

par $\Psi(u, t)$, il résulte ceci :

$$\Psi(u', t) = \Psi(u, t).$$

et, par conséquent, l'expression Ψ est indépendante des constantes C (¹) [4].

Deux arcs de cercle qui déterminent un sommet du contour d'encadrement de la figure peuvent comprendre entre eux, sur l'aire intérieure de la figure, un angle $\alpha\pi$. Les constantes C peuvent être choisies telles que ce sommet, déterminé sur le plan (u) par deux segments d'arcs de cercle, corresponde, sur le plan (u') à un sommet déterminé par deux segments rectilignes.

Alors, lorsqu'au point angulaire correspond la valeur $t = t_0$, la fonction $\frac{d}{dt}\log\frac{du'}{dt}$ a, d'après ce qui précède, pour les valeurs de la grandeur t situées dans le domaine de la valeur $t = t_0$, le développement suivant

$$\frac{\alpha - 1}{t - t_0} + d_1 + d_2(t - t_0) + \ldots,$$

où les coefficients d ont des valeurs réelles.

Par conséquent, la fonction $\Psi(u, t) = \Psi(u', t)$ possède le développement

$$\frac{1}{2}\frac{1 - \alpha^2}{(t - t_0)^2} + \frac{\delta_1}{t - t_0} + \delta_2 + \delta_3(t - t_0) + \ldots,$$

valable pour le domaine de la valeur $t = t_0$, développement où les coefficients δ ont également des valeurs réelles.

Si la surface limitée par le polygone curviligne ne renferme à son intérieur aucun point de ramification, alors la fonction $\Psi(u, t)$ possède pour toutes les valeurs de l'argument t, qui correspondent aux points situés à l'intérieur du demi-plan, le caractère d'une fonction

(¹) L'expression Ψ est un invariant différentiel aujourd'hui bien connu sous le nom d'*invariant différentiel* ou *dérivée de Schwarz* qui lui a été donné par *Cayley* (Schwarzian derivative). L. L.

entière, puisqu'elle a pour toutes les valeurs réelles de l'argument t des valeurs également réelles et qu'elle possède le caractère d'une fonction rationnelle; cette fonction est donc une fonction rationnelle $F(t)$ de t.

Le problème de la représentation conforme de l'aire d'un polygone limité par des arcs de cercles sur celle d'un demi-plan est par conséquent ramené à l'intégration d'une équation aux dérivées totales

$$\Psi(u, t) = F(t),$$

ainsi qu'à la détermination d'un certain nombre de constantes.

Cette solution peut aisément être étendue au cas où l'aire du polygone en question, limité par des arcs de cercle, renferme à son intérieur des points de ramification; la fonction rationnelle $F(t)$ deviendra aussi, en ce cas, infiniment grande pour des valeurs complexes de la grandeur t, et le nombre des constantes à déterminer, ainsi que celui des équations de condition à remplir, sera augmenté.

Il est facile de démontrer que l'intégrale générale de l'équation différentielle $\Psi(u, t) = F(t)$ est représentable comme quotient de deux solutions d'une même équation différentielle du second ordre ayant pour coefficients des fonctions rationnelles. Je dois cette remarque à une bienveillante communication de M. Weierstrass.

Si la figure à représenter est un triangle dont les côtés sont des arcs de cercle, l'équation différentielle précitée est celle de la série hypergéométrique et la détermination des constantes est praticable sans que l'on ait à résoudre des équations transcendantes [5].

Par l'entremise de l'intégrale

$$u - u_0 = \int_{t_0}^{t} (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1}\,dt,$$

regardée comme fonction de sa limite supérieure et où a, b, c désignent des constantes réelles, α, β, γ des constantes positives satisfaisant à la condition $\alpha+\beta+\gamma=1$, les aires des deux demi-plans T′ et T″, en lesquels l'axe des quantités réelles partage le plan (t), seront représentées sur celles de deux triangles rectilignes symétriques entre eux, U′ et U″ ayant pour angles $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$.

Le plan (t) pourra être représenté d'une manière conforme, au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques, sur la surface d'une sphère, de telle sorte qu'à l'axe des quantités réelles sur le plan (t) corresponde un grand cercle de la sphère. Alors, aux points symétriques sur les deux hémisphères correspondent comme images des points symétriques sur les aires des deux triangles plans.

Si l'on amène maintenant les deux triangles dans une position telle que leurs sommets correspondants coïncident, et si l'on conçoit alors que leurs surfaces, distinctes et séparées dans la représentation, aient en commun les points du contour d'encadrement et se raccordent entre elles le long de celui-ci, qui forme ainsi un *pli*, on est en présence d'une surface fermée U, simplement connexe, recouvrant partout doublement un triangle aux angles $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$. Le long de tout le contour de ce triangle, la surface U possède un pli le long duquel les deux feuillets se raccordent entre eux d'une manière continue. On peut encore dire, en d'autres termes, que cette surface peut être regardée comme celle d'un prisme triangulaire à hauteur infiniment petite.

Maintenant, à cette surface fermée U correspond, d'une manière uniforme, la surface totale de la sphère. En tous les points, la représentation conserve la similitude en les plus petites parties, exception faite des points qui correspondent aux sommets; en ces derniers, la représentation reste seulement uniforme ([1]) et continue.

Lorsque l'on n'a fait aucune convention relative au chemin d'intégration, la fonction intégrale u est une fonction multiforme de la limite supérieure t, à nombre infini de déterminations, et de même, en général, t est une fonction multiforme de u, à nombre infini de déterminations.

Il se présente des exceptions à cela pour les seuls systèmes de valeurs de α, β, γ qui suivent :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}; \qquad \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}; \qquad \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}.$$

Comparez le Mémoire précédemment cité de M. *Christoffel* et *Briot* et *Bouquet* (*Théorie des fonctions doublement périodiques*, 1re édition, p. 306-308).

Les différentes valeurs que peut prendre la grandeur u, le chemin d'intégration étant pris quelconque, pour une valeur déterminée de la limite supérieure t, peuvent toujours être déduites géométriquement de l'une d'entre elles au moyen de la surface U, en concevant que l'on ait recouvert le plan (u) d'un réseau de surfaces U en développant la surface U un nombre infini de fois sur le plan en question.

De la même manière, de la représentation conforme de l'aire d'un cercle sur celle d'un polygone rectiligne de n côtés, l'on déduit la représentation conforme de la

---

([1]) Uniforme (*eindeutig*), dans le sens du mot unidéterminatif, univoque, monotrope. L. L.

surface de la sphère sur les deux côtés de la surface de ce polygone de n côtés.

Le problème inverse de ce dernier est un cas particulier de ce problème plus général : Représenter d'une manière uniforme la surface fermée simplement connexe d'un polyèdre, encadré par des faces planes, sur la surface d'une sphère, de telle sorte que la représentation soit partout semblable à l'original en les plus petites parties, à l'exception des points correspondant aux sommets, points du reste où la continuité ne doit éprouver aucune rupture.

En admettant par hypothèse qu'une représentation, jouissant des propriétés susdites, soit en général possible, l'on arrive à la solution suivante :

Concevons la surface du polyèdre développée sur un plan et désignons par u la variable complexe qui sera représentée géométriquement par un point à l'intérieur du réseau des faces du polyèdre étendu sur le plan. On représentera directement, d'une manière uniforme, la surface de la sphère sur un plan (x) dont les points représentent géométriquement les valeurs d'une grandeur complexe x.

Ceci posé, l'on a

$$\frac{du}{dx} = C\Pi(x - x_\nu)^{\alpha_\nu - 1}.$$

Dans cette formule, que j'ai communiquée à M. *Weierstrass* en 1866, x_ν désigne la valeur de la grandeur x, qui correspond à un des sommets du polyèdre, tandis que la somme des angles compris entre les arêtes qui aboutissent à ce sommet est égale à $2\alpha_\nu\pi$. Le produit Π doit s'étendre à tous les sommets du polyèdre. La somme $\Sigma(\alpha_\nu - 1)$, étendue à tous les sommets du polyèdre, lorsque la valeur $x = \infty$ ne correspond pas à un sommet

du polyèdre, a pour valeur — 2, ainsi qu'il résulte du théorème d'*Euler* relatif aux polyèdres.

L'exactitude de cette formule, toujours sous l'hypothèse de la possibilité d'une pareille représentation, peut être démontrée au moyen de la considération de la fonction $\frac{d}{dx} \log \frac{du}{dx}$; l'on peut aussi démontrer que les constantes x_ν sont, par les conditions du problème, déterminées d'une manière uniforme, à trois constantes arbitraires complexes près renfermées dans une substitution fractionnaire du premier degré; jusqu'ici, je ne suis pas encore parvenu à démontrer rigoureusement qu'il est possible, pour tout polyèdre assigné, de déterminer explicitement ces constantes conformément aux conditions du problème [6].

En certains cas, cette détermination des constantes est praticable *a priori*, par exemple, lorsque le polyèdre assigné est régulier.

Ainsi la représentation de la surface de la sphère sur celle d'un cube peut être pratiquée par l'entremise de l'intégrale

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt[4]{1 - 14x^4 + x^8}}$$

[(*Voir* page 2 du Tome I des *Œuvres de M. Schwarz*: Sur la surface minima dont le contour donné est un quadrilatère gauche dont les côtés sont formés par quatre arêtes d'un tétraèdre régulier (publié d'abord dans les *Monatsberichte der Berliner Akad.*, p. 150; 1865)].

On peut rattacher à la représentation de la surface des polyèdres réguliers sur la sphère un nombre de problèmes analytiques parmi lesquels je mentionnerai le suivant :

Trouver tous les triangles sphériques qui peuvent

être représentés d'une manière conforme sur l'aire d'un cercle par l'entremise de fonctions algébriques des coordonnées [7].

Qu'il est toujours possible de représenter, d'une manière connexe et en conservant la similitude en les plus petites parties, une surface plane simplement connexe, dont le contour est formé par une ligne simple composée de portions de courbes analytiques, sur l'aire d'un cercle : c'est ce que *Riemann* a cherché à démontrer à l'aide du *principe* dit *de Dirichlet*.

Comme il a été fait des objections, bien fondées relativement à la rigueur, à la légitimité de ce mode de raisonnement dans les démonstrations des théorèmes d'existence, il était désirable de posséder un procédé de démonstration qui ne pourrait donner lieu aux critiques élevées contre le principe de *Dirichlet*.

J'ai cherché à établir une telle démonstration dans un Mémoire communiqué à M. *Weierstrass*, en novembre de l'année 1868, pour le cas où le contour de la figure à représenter est en tous ses points *convexe* par rapport à l'extérieur de la figure [8].

Notes de M. Schwarz *au précédent Mémoire publiées dans les Gesammelte Abhandlungen, tome II ;* 1890.

[1] Relativement à ces considérations on peut comparer le passage suivant du Mémoire de *Jacobi : Sur les nombres complexes que l'on doit considérer dans la théorie des résidus des cinquième, huitième et douzième puissances* (*Journal de Crelle*, t. 19, p. 315) : « ... Ce pourrait être un problème aussi intéressant que difficile d'obtenir une interprétation géométrique de cette division de l'arc de la lemniscate en $a + b\sqrt{-1}$ parties et de la composition de la $p^{\text{ième}}$ partie de l'arc à l'aide de sa division en $a + b\sqrt{-1}$ et en $a - b\sqrt{-1}$ parties. Dans ces

derniers temps les imaginaires ont pris place avec grand succès dans le domaine de la Géométrie; on peut s'attendre, après le merveilleux progrès qu'elle a réalisé ainsi entre les mains de *Steiner*, à ce qu'elle prenne aussi possession de ces idées plus abstraites. »

[2] La démonstration que l'on doit à M. *Weierstrass*, relativement à la possibilité de la détermination des constantes repose sur une variation continue des constantes a, b, c, ... Une démonstration basée sur les mêmes idées a été publiée par M. Schläfli, dans son Mémoire : *Sur la possibilité générale de la représentation conforme d'une figure plane délimitée par des droites sur un demi-plan* (*Journal de Crelle*, t. 78, p. 63-80; 1873).

Le Mémoire de l'Auteur (M. Schwarz), *Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles* $\Delta u = 0$ ..., publié p. 144-171 des *Œuvres*, t. II, tire son origine essentiellement de l'effort fait pour trouver une démonstration indépendante pour la possibilité de la détermination des constantes en question.

[3] Comparez, p. 102-107 des *Œuvres* précitées, t. II : *Notizia sulla rappresentazione conforme di un' area ellitica sopra un' area circolare*, par M. *Schwarz*.

[4] Dans le Mémoire : *Sur la construction des Cartes géographiques* (*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres*, 1779, p. 161-185), *Lagrange* traite le problème suivant : « Si l'on désigne par $f(u+ti)$ et $F(u-ti)$ deux fonctions conjuguées des deux arguments complexes conjugués $u+ti$, $u-ti$, déterminer toutes les représentations conformes du plan $u+ti$ sur le plan $x+yi$, praticables par l'entremise des équations

$$x = \frac{1}{2}[f(u+ti) + F(u-ti)],$$

$$y = \frac{1}{2i}[f(u+ti) - F(u-ti)],$$

$$x + yi = f(u+ti), \qquad x - yi = F(u-ti),$$

et qui jouissent de cette propriété qu'au réseau *des lignes*

droites respectives $u = \text{const.}$, $t = \text{const.}$ sur le plan $u + ti$, correspond un réseau *de circonférences* sur le plan $x + yi$. »

Pour résoudre ce problème, *Lagrange* évalue les courbures $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{\rho}$ des courbes sur le plan $x + yi$ qui correspondent respectivement aux droites $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ et il obtient,

la grandeur $\dfrac{1}{\sqrt{f'(u+ti)\,F'(u-ti)}}$ étant désignée par Ω,

les équations

$$\frac{1}{r} = -\frac{\partial\Omega}{\partial t}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\partial\Omega}{\partial u}.$$

Au moyen respectivement de la première et de la seconde de ces deux équations l'on obtient, puisque par suite de la condition posée la grandeur r ne doit pas dépendre de la grandeur u, ni la grandeur ρ de la grandeur t, l'équation de condition suivante

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial t\,\partial u} = 0. \qquad \text{(Lagrange, \textit{loc. cit.}, p. 173.)}$$

Cette équation de condition conduit à l'équation

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{f''(u+ti)}{f'(u+ti)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(u+ti)}{f'(u+ti)}\right)^2 \\ &\quad = \frac{F'''(u-ti)}{F'(u-ti)} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''(u-ti)}{F'(u-ti)}\right)^2, \end{aligned} \right.$$

à l'aide de laquelle on reconnaît que dans le problème considéré par *Lagrange* les expressions dans le second et dans le premier membre de l'équation précédente doivent être égales à une même constante réelle, que l'on pourra désigner par $-2k$.

La fonction f par conséquent doit satisfaire à une équation de la forme

$$(2) \qquad \frac{f''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = -2k.$$

Lagrange, du reste, n'a pas présenté l'équation qui sert à déterminer la fonction f sous cette forme ; il arrive, en posant

$$\frac{1}{\sqrt{f'(u+ti)}} = \varphi(u+ti),$$

à l'équation

$$(3) \qquad \frac{\varphi''(u+ti)}{\varphi(u+ti)} = k.$$

Le passage de l'équation différentielle non linéaire du troisième ordre (2) à l'équation différentielle linéaire du second ordre (3) est un cas particulier du passage traité p. 219-220 des Œuvres de l'auteur, t. II (*Théorie de la série hypergéométrique de Gauss*), où l'on pose $p = 0$, $q = -k$. D'après cela, lorsque la fonction $f(u+ti)$ vérifie l'équation différentielle (2), la fonction $\frac{f(u+ti)}{\sqrt{f'(u+ti)}}$ est une seconde intégrale particulière de l'équation différentielle (3).

Lorsqu'il n'est pas question d'un *réseau de circonférences*, mais que l'on traite *séparément* d'un *arc de cercle* du plan $x+yi$ qui doit, par exemple, correspondre à un segment de l'axe des quantités réelles $t = 0$ du plan $u+ti$, lors d'une représentation conforme praticable par l'entremise de la fonction $x+yi = f(u+ti)$, les conclusions de *Lagrange* restent valables en leurs points essentiels, avec cette modification que l'équation (1) doit être satisfaite, non pour une région doublement étendue, mais seulement *tout le long d'une ligne*, c'est-à-dire ici le long d'un segment de l'axe des quantités réelles sur le plan $u+ti$, en sorte, par conséquent, que la grandeur

$$\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = -2\frac{\varphi''}{\varphi}$$

ne doit pas nécessairement être une constante, mais peut être une fonction quelconque de l'argument complexe $u+ti$, qui jouit de cette propriété qu'à des valeurs réelles (correspondant au segment en question de l'axe des quantités réelles) de l'argument, correspondent des valeurs *réelles* de la fonction.

Conformément aux notations de l'auteur, p. 219 de ce Mémoire, et p. 220, t. II des *Œuvres* (*Sur la Théorie de la série hypergéométrique*), l'expression du premier membre de l'équation (1), tirée des recherches de *Lagrange*, pourrait être désignée par $\Psi(f, u+ti)$; ce qui nous prouve qu'il est possible de déduire directement l'expression différentielle Ψ des recherches contenues dans le Mémoire précité de *Lagrange*.

Quant à la notation $\Psi(s, x)$, on peut faire l'objection que, relativement à cette expression, nous n'avons pas à faire à une *fonction* des deux arguments s et x, mais plutôt à une expression différentielle formée à l'aide de la fonction s, en différentiant d'une certaine manière par rapport à x. Aussi la notation et la désignation adoptées par M. *Cayley*, pour cette expression différentielle

$$\{s, x\} = \frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2,$$

ont incontestablement l'avantage sur celles employées par l'auteur.

M. *Cayley* a fait l'honneur à l'auteur de joindre son nom à la désignation de l'expression $\{s, x\}$ [ARTHUR CAYLEY, *Sur la dérivée de Schwarz et les fonctions des corps réguliers;* Cambridge (*Math. Trans.*, t. XIII, Part I, p. 5-68)]. Le Mémoire de M. *Cayley*, rempli de détails et extraordinairement riche en matières, expose les recherches des divers écrivains sur les questions qui peuvent être rattachées à l'expression différentielle $\{s, x\}$, sous une forme des plus lucides et complètes, en ajoutant encore du nouveau aux résultats des recherches des autres. Le Mémoire renferme aussi une bibliographie du sujet, ainsi qu'un développement détaillé des formules de transformation relatives à l'expression différentielle $\{s, x\}$. A l'aide de l'une des formules qu'il établit,

$$\{s, x\} = -\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \{x, s\};$$

M. *Cayley* retrouve la théorie des *réciprocants*, déjà connue par les travaux de *Sylvester*.

Un travail de M. *Neovius* (Helsingfors, 1883, p. 14), intitulé: *Détermination de deux surfaces minima périodiques particulières sur lesquelles sont situées une infinité de droites et une infinité de lignes géodésiques planes*, renferme un exposé des relations qui existent entre l'expression différentielle désignée par $D_x(p)$ par M. *Schottky* (*Sur la représentation conforme d'aires planes à connexion multiple.* Berlin 1875; Dissertation inaugurale) et l'expression désignée par $[v, u]$ par M. *Dedekind*, d'une part [*Sur les fonctions mo-*

dulaires elliptiques (*Crelle,* tome 83, p. 278)] et la susdite expression différentielle $\{s, x\}$, d'autre part.

Ces relations sont données par les équations

$$D_x(p) = 2\left(\frac{dp}{dx}\right)^{-2}\{p, x\},$$

$$[v, u] = 2\left(\frac{du}{dx}\right)^{-1}\{v, u\}.$$

M. *Neovius* renvoie encore aux pages 298, 415, 416 des *Œuvres de Riemann, première édition.*

L'Ouvrage de M. *Klein* (*Leçons sur l'icosaèdre et la résolution des équations du cinquième degré;* Leipzig, 1884) renferme, pages 66 à 82, une *présentation* détaillée de certaines recherches reposant sur la considération de l'expression différentielle $\{\eta, Z\}$.

M. *Klein,* pour l'expression différentielle $\{\eta, Z\}$, emploie la notation $[\eta]_Z$.

[5] *Voir* à ce sujet, Section III du Mémoire déjà cité : *Sur les cas où la série hypergéométrique de Gauss représente une fonction algébrique de son quatrième élément* (Schwarz, *Œuvres*, t. II, p. 221 à 233).

[6] La démonstration de la possibilité de déterminer les constantes dont on parle ici est donnée pour le tétraèdre (*Représentation conforme de la surface d'un tétraèdre sur celle d'une sphère*), aux pages 94 à 101, *loc. cit.*, et pour un polyèdre quelconque à faces planes, dans le Mémoire *Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles* $\Delta u = 0$ (p. 167 à 170, *loc. cit.*).

[7] *Voir* Section VI du Mémoire, déjà cité, *Sur la série hypergéométrique de Gauss* (*loc. cit.*, p. 243 à 254).

[8] La démonstration citée ici est, en ses points essentiels, la même que celle donnée par l'auteur dans le Mémoire *Sur la théorie de la représentation conforme* (*loc. cit.*, t. II, p. 108 à 132).

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1865 [1];

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE PAR M. F. SARTIAUX,
Élève à l'École Lacordaire.

On donne sur un plan deux circonférences C *et* C′; *d'un point* A *de* C *on mène des tangentes à* C′, *on joint les points de contact de ces tangentes; cette droite coupe la tangente menée en* A *à la circonférence* C *en un point* M. *On demande l'équation du lieu décrit par* M *lorsque* A *parcourt la circonférence* C.

Examiner les différentes formes du lieu selon la grandeur et les positions relatives des circonférences C *et* C′.

Indiquer les cas où il se décompose; faire voir que le lieu des points M *est tangent à la circonférence* C *en chacun des points d'intersection de cette courbe et de la circonférence* C′.

Les cercles C et C′ définissent un faisceau de cercles. Or, on sait que les polaires d'un point A par rapport à tous les cercles de ce faisceau se coupent au même point M. C'est, en somme, le lieu de ce point M, quand A décrit le cercle C, que l'on cherche.

Ce point M peut être considéré comme le point d'intersection de la tangente en A au cercle C, avec la polaire du point A, par rapport au cercle du faisceau composé de l'axe radical Δ des circonférences C et C′ et

[1] *Voir* t. III, 2e série, p. 268; 1864.

de la droite de l'infini. Il est donc, sur chaque tangente mobile à la circonférence C, le point symétrique du point de contact A, par rapport au point d'intersection de cette tangente avec l'axe radical. On a donc ainsi une génération simple du lieu ([1]).

Les points du lieu à l'infini sont ceux pour lesquels la tangente au cercle est parallèle à la polaire du point A, par rapport à l'axe radical Δ et à la droite de l'infini. Ils se trouvent donc sur une parallèle à Δ. On voit facilement que les asymptotes sont les symétriques, par rapport à l'axe radical Δ, des tangentes au cercle C aux extrémités de la ligne des centres, et que la courbe reste toujours dans la région du plan comprise entre ces droites.

Il n'y a évidemment pas de points réels sur la ligne des centres quand Δ coupe réellement le cercle C. Dans ce cas, le lieu passe par les points d'intersection de C et de Δ. Appelons S un de ces points. Quand A vient en S, le point M arrivant aussi en ce point, la tangente en S à la courbe, lieu des points M, est la position limite de SM quand A vient en S. La droite SM, Δ, la droite SA et la parallèle à MA, menée de S, forment un faisceau harmonique. Lorsque A vient en S, la droite SA et cette parallèle coïncident avec la tangente en S à C : il en est donc de même de SM. Ainsi : le lieu de M est tangent à C en S ([2]).

([1]) On peut dire aussi : le centre radical de C, C' et de A, considéré comme un cercle de rayon nul, est à la rencontre de Δ et de AM. Étant aussi sur l'axe radical de A et de C, il est le milieu du segment AM : donc, etc.

([2]) On peut aussi arriver à ce résultat en faisant usage d'infiniment petits, ou encore en appliquant la construction de la normale en un point quelconque du lieu considéré comme étant engendré par un point d'une figure mobile de grandeur invariable. Il est facile de

Quand Δ ne coupe pas réellement le cercle C, les points limites du faisceau des cercles sont réels, et un point du lieu est sur l'une et l'autre des polaires de A par rapport à ces cercles limites. Donc le lieu passe par ces points. Celui qui est à l'intérieur de C est un point isolé du lieu; la sécante, qui passe par l'autre, restant constamment perpendiculaire à la droite qui le joint au point mobile A, a pour positions limites, quand M se confond avec ce point limite, les perpendiculaires aux tangentes issues de ce point au cercle C. Ces perpendiculaires sont donc les tangentes au point double du lieu.

On a donc deux formes du lieu : l'une à points doubles imaginaires ne coupant pas la ligne des centres, l'autre à points doubles réels sur celle-ci.

Le lieu ne dépendant que de la position relative de C et de Δ, il n'y aura de cas particulier que quand Δ sera tangente au cercle C. Les points limites sont alors confondus au point de contact de Δ et de C. Quand le point A vient en ce point de contact, le point d'intersection de ses polaires par rapport aux cercles du faisceau est indéterminé sur la tangente Δ. Donc la droite Δ fait partie du lieu. Le reste du lieu, engendré comme précédemment, a pour asymptote unique la symétrique par rapport à Δ de la tangente au cercle C à l'extrémité de la ligne des centres. Le point de contact est un point double du lieu, et les tangentes en ce point étant les perpendiculaires issues de lui à la circonférence, sont confondues avec la ligne des centres. Donc c'est un point de rebroussement. On voit facilement que le lieu est une cissoïde droite engendrée, d'après la construction

---

trouver cette génération, qui est tout à fait analogue à celle donnée par Newton pour la cissoïde.

connue, par un point pris sur une sécante mobile autour du point de contact de C et de Δ, à partir du point d'intersection de cette sécante avec le cercle tangent au cercle C, au point de contact de Δ avec C, et décrit sur le segment de la ligne des centres compris entre Δ et l'asymptote comme diamètre.

Le lieu se composant d'une cissoïde et d'une droite est donc du quatrième degré.

On le voit d'ailleurs directement en remarquant que sur une droite passant par l'un des points limites du faisceau, il y a deux points du lieu correspondant aux deux points A d'intersection de la perpendiculaire menée par ce point à la droite considérée avec le cercle C, puisque cette droite est la polaire par rapport au point limite de ces points A. Le point limite étant un point double du lieu, il y a quatre points du lieu sur une droite; il est donc du quatrième degré.

De plus, tous les cercles du faisceau passant par les deux points cycliques du plan, les polaires de ces points par rapport à ces cercles se coupent en ces points mêmes. Donc le lieu est circulaire.

Ces résultats montrent que, dans le cas de décomposition, le lieu est une cubique circulaire à point de rebroussement, donc une cissoïde, et que les tangentes au lieu, dans le cas général, aux points d'intersection de C et de Δ, sont les tangentes au cercle C; puisque, d'après le mode de génération, le lieu ne peut pénétrer dans le cercle C, ni avoir en ces points des rebroussements, puisque la droite Δ, le coupant déjà en deux points à l'infini, le couperait en quatre autres points.

———

EXERCICES DE LICENCE;

PAR M. C. BOURLET.

I. $f(z)$ désignant une fonction holomorphe à l'intérieur d'un contour fermé simple C, et a et b deux nombres dont les affixes sont situées à l'intérieur du contour C, démontrer que l'on a

$$\int_a^b f(z)\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)\,\mathrm{L}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)dz;$$

l'intégrale du premier membre étant prise le long d'un chemin allant de a en b à l'intérieur du contour C et celle du second membre étant prise le long de ce contour C, dans le sens positif.

II. $u(z)$ désignant une fonction de la variable imaginaire z, régulière à l'intérieur d'un cercle C ayant l'origine O pour centre, et z désignant un point quelconque situé à l'intérieur de ce cercle, démontrer que, si l'on pose

$$u_1 = \int_0^z u(z)\,dz,$$

$$u_2 = \int_0^z u_1\,dz,$$

. . . .

$$u_p = \int_0^z u_{p-1}\,dz,$$

ces intégrales étant prises le long de chemins situés à

l'intérieur du cercle C, on a

$$u_{-p} = \frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{1}{p}x^p u - \frac{1}{p-1}\frac{x^{p+1}}{1}\frac{du}{dz} + \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^m \frac{1}{m+p}\frac{x^{m+p}}{m!}\frac{d^m u}{dz^m} + \ldots\right].$$

III. $P(x)$ étant un polynome entier de degré m, démontrer que l'équation différentielle linéaire

$$\frac{P^{(m)}(kx)}{m!}\frac{d^m y}{dx^m} + \frac{P^{(m-1)}(kx)}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{P'(kx)}{1!}\frac{dy}{dx} + P(kx)y = 0,$$

où k désigne une constante et $P'(x)$, $P''(x)$, ..., $P^{(m)}(x)$ les dérivées de $P(x)$, se ramène à une équation linéaire à coefficients constants, en z, en posant

$$y = ze^{-\frac{kx^2}{2}}.$$

CORRESPONDANCE.

M. de Saint-Germain. — *A propos de la quadrature du cercle.* — Un ouvrier charpentier du Calvados, M. Henri Guillot, a trouvé une construction simple du côté d'un carré approximativement équivalent à un cercle : il suffit de construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse est égale au diamètre du cercle et une des cathètes à une fois et demie le côté du décagone régulier inscrit : la seconde cathète est le côté proposé. Le rayon du cercle étant 1, ce côté est égal à 1,772167, au lieu de $\sqrt{\pi} = 1,772454$; l'erreur relative est inférieure à $\frac{1}{6000}$, graphiquement négligeable.

M. M. d'Ocagne. — *Extrait d'une lettre.* — « Le théorème sur lequel est fondée la solution de la question 1717, publiée dans le numéro d'avril (p. 188), se trouve dans ma

Note *Sur l'enveloppe de certaines droites variables* (N. A., 3ᵉ série, t. V, p. 89; 1886). Une élégante généralisation de ce théorème a été depuis lors obtenue par M. R. Godefroy (*C. R.*, t. CII, p. 604; 1886). Il est d'ailleurs très facile d'atteindre immédiatement et sans démonstration nouvelle à cette généralisation.

» En effet, le théorème que j'ai obtenu consiste en ceci : *Si un segment de droite ab dont les extrémités a et b décrivent les courbes planes* (a) *et* (b) *a une projection constante sur l'axe* Δ, *le point où la droite ab touche son enveloppe est symétrique par rapport au milieu de ab du point où cette droite est rencontrée par la perpendiculaire abaissée sur* Δ *du point de rencontre des tangentes en a et b aux courbes* (a) *et* (b).

» Si par un point o quelconque du plan on mène des segments od équipollents aux segments ab, le lieu (d) des extrémités de ces segments est une droite perpendiculaire à Δ.

» Supposons maintenant que les segments ab soient équipollents aux vecteurs od d'une courbe quelconque (d). Pour construire le point où le segment ab touche son enveloppe, nous pouvons substituer à la courbe (d) sa tangente au point d correspondant. C'est en cela que consiste la généralisation de M. R. Godefroy. »

M. **E. Lemoine.** — *Extrait d'une lettre.* — « A propos de la question 1743, une solution de moi est mentionée dans le numéro d'avril, p. 196; ce n'était pas à proprement parler une solution; je voulais simplement faire remarquer que cète question 1743 n'est autre chose que la *définition* des cercles de Neuberg. »

Dʳ **F. Schur.** — Au sujet de l'article de M. F. Farjon, *Théorèmes de Pascal et de Brianchon*, publié dans le numéro de février 1897, je crois utile de signaler les travaux suivants, dans lesquels la même méthode est employée :

Dandelin, *Recherches nouvelles sur les sections coniques* (*Annales de Mathématiques*, par J.-D. Gergonne, t. XV, p. 387).

Hesse, *Ueber das genadlinige Sechseck auf dem Hyperboloid* (*Crelle's Journal*, Bd. 24, p. 40).

Schröter, *Theorie der Oberflächen*, 2. Ordnung. Leipzig, Teubner, 1880, S. 117.

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse, par M. *Louis Raffy*, chargé de Cours à la Faculté des Sciences, maître de conférences à l'École Normale supérieure. 1 vol. in-8 de 250 pages. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1897.

Le livre de M. Raffy est avant tout un traité didactique où les éléments de la théorie des courbes et des surfaces sont exposés de façon méthodique, et illustrés, comme on dit quelquefois, par de nombreux exemples. Ceux-ci ne forment pas une compilation d'exercices; chacun d'eux vient à sa place, au fur et à mesure de l'exposition théorique, de sorte que le tout forme un ensemble bien coordonné et bien fondu, ce qui en facilitera notablement la lecture aux étudiants. Ces exemples se rapportent d'ailleurs aux figures géométriques, courbes ou surfaces, les plus classiques, et dont il n'est pas permis d'ignorer les propriétés essentielles à quiconque veut faire des études sérieuses de mathématiques.

Bien que M. Raffy ait évité de donner des indications historiques ou bibliographiques, pour éviter d'être entraîné trop loin, on peut reconnaître facilement qu'il a mis à profit des travaux récents, de sorte que les étudiants qui auraient déjà lu d'autres livres avant d'aborder le sien, pourront y trouver diverses questions dignes d'intérêt et nouvelles pour eux; je crois même que certaines solutions appartiennent en propre à l'auteur du Livre.

Le souci de la rigueur et la pratique de l'enseignement ont conduit M. Raffy à adopter certaines définitions un peu restrictives, mais du moins parfaitement précises, et d'ailleurs très suffisamment générales. Je crois cette tendance bonne, car on rencontre trop souvent, dans divers Livres ou Mémoires, des propositions sujettes à critique, quelquefois vraiment inexactes, parce que les hypothèses ou les définitions dont elles dépendent n'ont pas été établies avec assez de netteté; sans

compter qu'on est exposé à employer une démonstration compliquée sans grand profit pour la généralité des résultats.

M. Raffy a dû, toujours dans le même ordre d'idées, préciser certains points délicats. Je signalerai, en particulier, une discussion intéressante de la question relative à la fixation du signe de la torsion d'une courbe, discussion conduisant à des conventions logiques et très nettes qu'il serait trop long de détailler ici, mais sur lesquelles j'appelle spécialement l'attention des lecteurs des *Nouvelles Annales*. Les quelques pages où ce sujet est traité sont certainement de celles qui justifient ce passage de la Préface : « Ce Livre, ai-je dit, s'adresse à ceux qui apprennent; mais je serais heureux si ceux qui savent, venant à y jeter les yeux, y trouvaient matière à penser. »

M. Raffy a précisé de même le signe du paramètre de distribution des plans tangents à une surface gauche; il fait d'ailleurs remarquer, très justement, que le paramètre de distribution de la surface engendrée par les binormales d'une courbe n'est autre chose que le rayon de torsion de la courbe elle-même. De sorte que les questions de signe relatives à la torsion et au paramètre de distribution se rattachent tout naturellement l'une à l'autre.

On peut regretter que M. Raffy ait cru devoir laisser de côté l'étude de certaines questions telles que, par exemple, celles qui se rapportent aux courbes dont les normales principales sont normales d'une autre courbe. Mais l'auteur déclare dans sa Préface qu'il a voulu surtout traiter complètement certaines questions fondamentales et préparer l'étude ultérieure des courbes.

Je pense en avoir dit assez pour montrer ce qui caractérise les *Leçons* de M. Raffy, et pour faire comprendre que l'auteur n'a pas voulu reproduire ce qui se trouve déjà plus ou moins complètement dans d'autres Traités, mais faire une œuvre personnelle et apporter quelques perfectionnements à l'exposition des théories classiques. Pour donner une idée du contenu de ce Livre, sans reproduire le détail de la Table des matières, il suffit de dire que ces *Leçons* correspondent à la partie du programme du certificat « Calcul différentiel et intégral » relative aux applications géométriques, et donnent la matière d'une préparation essentielle aux *Leçons* de M. Darboux qui font la matière du programme de Géométrie supérieure.

Ch. Bioche.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. XI; 1897.

Bollettino dell' Associazione « Mathesis ». Turin, 1896-1897.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, publiée par C. JORDAN; 5e série, t. III. Paris, 1897.

Bulletin astronomique, t. XIV. Paris, 1896-1897.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, publié par J.-C.-V. HOFFMANN. Leipzig, 1897.

Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle), publié par MM. WEIERSTRASS et L. FUCHS; B. 117. Berlin, 1897.

Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas, publié par F. GOMES TEIXEIRA; t. XIII. Coïmbre, 1897.

Atti della R. Accademia dei Lincei (294e année); Rendiconti, Rome, 1897.

Biblioteca Matematica, Journal d'histoire des Mathématiques, publié par G. ENESTRÖM. Stockholm, 1896-1897.

Il Nuovo Cimento, organo della Soc. ital. di Fisica; 5e série, t. V. Pise, 1897.

Archivo de Matematicas puras y aplicadas, rédigé par MM. E. L. ORTIZ, L. GASCO et M. BELMAS. Madrid, Valence, 1896.

Periodico di Matematica, publié par le Dr G. LAZZERI. Livourne, 1897.

Bulletin des Sciences mathématiques, rédigé par G. DARBOUX et J. TANNERY; 2e série, t. XX. Paris, 1896.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. X, 1896.

C. WESSEL. — Essai sur la représentation analytique de la direction, avec préfaces de MM. H. VALENTINER et L.-N. THIELE. Copenhague, 1897.

G. FONTENÉ. — Géométrie dirigée. Les angles dans un plan orienté avec des droites dirigées et non dirigées. Paris, Nony, 1897.

Major P.-A. MAC MAHON. — Memoir on the theory of the partition of numbers; extr. des *Phil. Trans. of the Royal Society*. Londres, 1896.

L. GÉRARD. — Construction du polygone régulier de 17 côtés au moyen du seul compas; ext. des *Math. Annalen*. Leipzig, 1896.

R. DE SAUSSURE. — Principles of a new line Geometry. Washington, 1897.

J. NEUBERG. — Sur un problème de Jacobi; extrait du *Bull. de la Soc. Physico-Math*. Kasan, 1896.

A. GRETCHANINOW. — Sur la stabilité du mouvement de la machine réglée par un régulateur à action directe. Kharkow, 1897.

E. LAMPE. — Sur quelques erreurs dans les « *Nuove Tavole delle funzioni iperboliche* » de M. A. FORTI. Turin, 1897.

RUTH GENTRY. — On the forms of plane quartic curves. New-York, 1896.

J. P. Gram. — Note sur le calcul de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Copenhague, 1895.

Mario Pieri. — Sulli enti primitivi della Geometria projettiva. Turin, 1897.

J. Petersen. — Théorie des équations algébriques (trad. par H. Laurent). Paris, Gauthier-Villars et fils; 1897.

C. Bourlet. — Sur les opérations en général; extrait des *C. R. de l'Ac. des Sciences*, 15 février 1897.

A. Provost. — Notes sur les axes des projections des sections planes des cylindres et des cônes; extrait de la *R. de Math. spéc.*, février-mars 1897.

T. C. Simmons. — Sur la probabilité des événements composés; extr. des *C. R. de l'A. F. A. S.*, Congrès de Carthage. Paris, 1896.

Éd. Collignon. — Applications diverses de la Géométrie des masses; extr. des *C. R. de l'A. F. A. S.*. Congrès de Carthage. Paris, 1896.

Z. G. de Galdeano. — Las modernas generalizaciones expresadas por el algebra simbolica, les Geometrias no-euclideas y el concepto de hiper-espacio. Madrid, 1896.

J. Vidaillet. — Sur une interprétation géométrique des coordonnées trilinéaires, avec préface de G. Papelier; lith., 115 p.; Paris, 1896.

L'abbé Issaly. — Optique géométrique, 8e Mémoire. Complément aux propriétés polarisatrices des faisceaux de rayons en général; extr. des *Mém. de la Soc. des Sc. phys. et natur. de Bordeaux*, t. III, 5e série.

E. Cesàro. — Sulla distribuzione dei numeri primi; extr. des *Rend. dell' R. Acc. d. Sc. fis. et mat. di Napoli*. Naples, 1896.

Gino Loria. — Matematica, extr. du *Dizionario illustrato di Pedagogia*. Mantoue, 1896.

R. Bettazzi. — Fondamenti per una teoria generale dei gruppi. Rome, 1896.

R. Bettazzi. — Sulla definizione del gruppo finito. Turin, 1897.

J. Franel. — Sur une formule fondamentale de Kronecker; extr. des *Math. Annalen*, t. 48, 1896.

J. Andrade. — Sur la méthode des moindres carrés; extr. du *Bull. de la Soc. scientif. et médicale de l'Ouest*. Rennes, 1896.

H. Duport. — Mémoire sur les lois fondamentales de la Mécanique; extrait de la *Revue bourguignonne de l'Enseignement supérieur*; 1897.

G. Vailati. — Sull' importanza delle ricerche relative alla storia delle Scienze. Turin, 1897.

P. Burgatti. — Di alcuni invarianti relativi alle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine; extr. des *Rend. dell' R. Acc. dei Lincei*. Rome, 1896.

A. Amiot. — Éléments de Géométrie; nouvelle édition, entièrement refondue, par F. Vintéjoux; in-8°. Paris, chez Delagrave; 1897.

———

QUESTIONS.

1765. On coupe, par un plan arbitraire, un ellipsoïde donné, et l'on prend la circonférence lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse d'intersection. Lorsqu'on fait varier le plan, on obtient des circonférences qui n'occupent qu'une région déterminée de l'espace; on demande quelle est la surface qui limite cette région? (MANNHEIM.)

1766. On donne un cylindre de révolution et un cône dont l'axe de révolution est parallèle aux génératrices du cylindre. On déplace un cône de grandeur constante, dont l'axe de révolution reste parallèle aux génératrices du cylindre, de façon que son sommet décrive la courbe d'intersection du cylindre et du cône donnés. On demande quelle est l'enveloppe de la trace de ce cône mobile sur un plan de section droite du cylindre. (MANNHEIM.)

1767. Étant donné un point M de l'espace, on lui fait correspondre le point M' qui lui est diamétralement opposé dans la sphère qui passe par ce point et par un cercle fixe Γ donné dans un plan π. Si le point M décrit une courbe (M) ou une surface [M], le point M' décrit une courbe (M') ou une surface [M'].

Démontrer les théorèmes suivants :

1° Si la surface [M] est une quadrique passant par le cercle Γ, la surface [M'] est aussi une quadrique passant par ce cercle.

Ces deux quadriques se coupent suivant un second cercle Γ_1 et la sphère admettant Γ_1 pour section diamétrale contient aussi le cercle Γ.

Si la surface [M] se réduit à un plan, le théorème subsiste, mais la quadrique [M'] passe alors par le point à l'infini dans la direction normale au plan du cercle Γ.

2° Si la courbe (M) est une section circulaire de la quadrique [M] dans un plan parallèle au plan π_1 du cercle Γ_1, la courbe (M') est une section circulaire de la quadrique [M'] également dans un plan parallèle à π_1.

3° Pour des surfaces ou des courbes quelconques on a les propositions suivantes :

Les parallèles aux normales en M et en M′ aux surfaces [M] et [M′], respectivement menées par M′ et M, se coupent dans le plan π.

Les plans parallèles aux plans normaux en M et en M′ aux courbes (M) et (M′), respectivement menés par M′ et M, se coupent dans le plan π.

(Cette seconde proposition est une conséquence immédiate de la première).

Remarque. — Il résulte de là que les normales en M et en M′ aux surfaces [M] et [M′] se rencontrent, et que les plans normaux en M et en M′ aux courbes (M) et (M′) se coupent suivant une droite parallèle au plan π. (M. d'Ocagne).

1768. L'expression

$$\begin{aligned}
A = &(m-1)(m-2)\ldots(m-k) - \frac{n}{1}(m-2)(m-3)\ldots(m-k-1)\\
&+\frac{n(n-1)}{1.2}(m-3)(m-4)\ldots(m-k-2) - \ldots\\
&+\frac{n}{1}(-1)^{n-1}(m-k)(m-k-1)\ldots(m-2k+1)\\
&+(-1)^n(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k)
\end{aligned}$$

est indépendante de m pour $k = n$, ou $k < n$.

Dans le premier cas, on a

$$A = 1.2.3\ldots n,$$

et dans le second

$$A = 0.$$

Ainsi l'on a

$$\begin{aligned}
&(m-1)(m-2)(m-3) - 3(m-2)(m-3)(m-4)\\
&\quad + 3(m-3)(m-4)(m-5) - (m-4)(m-5)(m-6) = 6,\\
&(m-1)(m-2)(m-3) - 2(m-2)(m-3)(m-4)\\
&\qquad\qquad + (m-3)(m-4)(m-5) = 0.
\end{aligned}$$

(Genty.)

ERRATA.

T. XVI, 1897, p. 61, deuxième formule, *au lieu de* $+m$, *lisez* $-m$.

PREMIER CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1897.

Résultat.

Après examen des Mémoires adressés à la Rédaction pour le premier concours de 1897, le prix a été décerné à M. A. Pagès. Son Mémoire paraîtra dans l'un de nos prochains numéros.

[R4b]

SUR LES INTÉGRALES COMMUNES A PLUSIEURS PROBLÈMES SUR L'ÉQUILIBRE D'UN FIL FLEXIBLE ET INEXTENSIBLE;

Par M. N. SALTYKOW.

Soient X, Y, Z les composantes, suivant trois axes rectangulaires, de la force rapportée à l'unité de masse d'un fil flexible et inextensible; x, y, z les coordonnées d'un élément; k la densité; T la tension, regardées comme fonctions de l'arc s du fil. Les équations différentielles de l'équilibre du fil sont

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dx}{ds}\right) + kX = 0, \\ \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dy}{ds}\right) + kY = 0, \\ \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dz}{ds}\right) + kZ = 0, \\ \left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{ds}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

I. Soient k une constante, X, Y, Z des fonctions de x, y, z, ou k une fonction de s, X, Y, Z dépendant de s, x, y, z.

S'il existe la condition

$$\frac{X}{x-a_1} = \frac{Y}{y-a_2} = \frac{Z}{z-a_3},$$

a_1, a_2, a_3 étant des constantes arbitraires, les équations (1) ont trois intégrales

$$T\left[(y+a_2)\frac{dx}{ds} - (x+a_1)\frac{dy}{ds}\right] = C_1,$$

$$T\left[(z+a_3)\frac{dx}{ds} - (x+a_1)\frac{dz}{ds}\right] = C_2,$$

$$\frac{z-a_3}{x+a_1} - \frac{(z+a_3)\dfrac{dx}{ds} - (x+a_1)\dfrac{dz}{ds}}{(y+a_2)\dfrac{dx}{ds} - (x+a_1)\dfrac{dy}{ds}}\,\frac{y+a_2}{x-a_1} = C_3;$$

C_1, C_2, C_3 sont des constantes arbitraires.

II. Soient k une constante, X, Y, Z des fonctions de x, y, z.

1. S'il existe la condition

$$\frac{(y+a_5)a_9 - (x+a_1)a_{10}}{\left\{\begin{array}{l}[(z+a_2y+a_3)(y+a_5) - (a_6y+a_8)(x+a_1)]X \\ \quad +[(z+a_6x+a_7)(x+a_1)+(a_2x-a_4)(y+a_5)]Y\end{array}\right\}}$$

$$= \frac{(z-a_6x+a_7)a_9 + (a_4-a_2x)a_{10}}{\left\{\begin{array}{l}[(z+a_2y+a_3)(z+a_6x-a_7) - (a_6y+a_8)(a_4-a_2x)]X \\ \quad -[(z-a_6x-a_7)(x-a_1)+(a_2x-a_4)(y+a_5)]Z\end{array}\right\}} = k,$$

a_1, a_2, …. a_{10} étant des constantes arbitraires, les équations (1) admettent deux intégrales

$$T\left[(z+a_2y+a_3)\frac{dx}{ds} - (a_2x-a_4)\frac{dy}{ds} - (x+a_1)\frac{dz}{ds}\right] - a_9s = C_1,$$

$$T\left[(a_6y-a_8)\frac{dx}{ds} - (z-a_6x+a_7)\frac{dy}{ds} - (y-a_5)\frac{dz}{ds}\right] - a_{10}s = C_2,$$

où C_1, C_2 sont des constantes arbitraires.

En effet, on a

$$S_1 = V_1 \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) - \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) - U_1 = 0,$$

$$S_2 = V_2 \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) - \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) - U_2 = 0,$$

relations où l'on a posé

$$V_1 = \frac{(z + a_2 y + a_3)(y + a_5) + (a_6 y + a_8)(x + a_1)}{(z - a_6 x + a_7)(x + a_1) - (a_2 x - a_4)(y + a_5)},$$

$$V_2 = \frac{(z + a_2 y + a_3)(z + a_6 x + a_7) + (a_3 y + a_8)(a_4 - a_2 x)}{(z + a_6 x + a_7)(x + a_1) + (a_2 x - a_4)(y + a_5)},$$

$$U_1 = \frac{(y + a_5)a_9 + (x + a_1)a_{10}}{(z + a_6 x + a_7)(x + a_1) + (a_2 x - a_4)(y + a_5)},$$

$$U_2 = \frac{(z + a_6 x + a_7)a_9 + (a_4 - a_2 x)a_{10}}{(z + a_6 x + a_7)(x + a_1) + (a_2 x - a_4)(y - a_5)}.$$

Il est évident que

$$(a_2 x - a_4)V_1 + (x + a_1)V_2 = z + a_2 y + a_3,$$

$$(z + a_6 x + a_7)V_1 - (y + a_5)V_2 = a_6 y - a_8,$$

$$(a_2 x - a_4)U_1 + (x + a_1)U_2 = a_9,$$

$$(z + a_6 x + a_7)U_1 - (y + a_5)U_2 = a_{10}.$$

Il s'ensuit que les premiers membres des équations

$$(a_2 x - a_4)S_1 + (x + a_1)S_2 = 0,$$

$$(z + a_6 x + a_7)S_1 - (y + a_5)S_2 = 0$$

sont des dérivées exactes :

$$\frac{d}{ds}\left\{T\left[(z + a_2 y + a_3)\frac{dx}{ds} + (a_2 x - a_4)\frac{dy}{ds} - (x + a_1)\frac{dz}{ds}\right] + a_9 s\right\},$$

$$\frac{d}{ds}\left\{T\left[(a_6 y + a_8)\frac{dx}{ds} - (z + a_6 x + a_7)\frac{dz}{ds} + (y + a_5)\frac{dy}{ds}\right] + a_{10} s\right\}.$$

2. S'il existe la condition

$$k[a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4(yZ - zY) + a_5(zX - xZ) + a_6(xY - yX)] = a_7,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_7$ étant des constantes arbitraires, les équations (1) ont l'intégrale

$$\mathrm{T}\left[a_1 \frac{dx}{ds} + a_2 \frac{dy}{ds} + a_3 \frac{dz}{ds} + a_4\left(y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds}\right) + a_5\left(z \frac{dx}{ds} - x \frac{dz}{ds}\right) + a_6\left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds}\right)\right] = a_7 s + \mathrm{C};$$

C est une constante arbitraire.

III. — 1. S'il existe la condition

$$\frac{(y + a_5)\Psi_1(s) - (x + a_1)\Psi_2(s)}{\left\{\begin{array}{l}[(z + a_2 y + a_3)(y + a_5) + (a_6 y + a_8)(x + a_1)]\mathrm{X} \\ \quad - [(z + a_6 x + a_7)(x + a_1) + (a_2 x - a_4)(y + a_5)]\mathrm{Y}\end{array}\right\}}$$
$$= \frac{(z + a_6 x + a_7)\Psi_1(s) + (a_4 - a_2 x)\Psi_2(s)}{\left\{\begin{array}{l}[(z + a_2 y + a_3)(z + a_6 x + a_7) + (a_6 y + a_8)(a_4 - a_2 x)]\mathrm{X} \\ \quad - [(z + a_6 x + a_7)(x + a_1) + (a_2 x - a_4)(y + a_5)]\mathrm{Z}\end{array}\right\}} = k,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_8$ étant des constantes arbitraires, Ψ_1, Ψ_2 des fonctions arbitraires, les équations (1) admettent deux intégrales

$$\mathrm{T}\left[(z + a_2 y + a_3)\frac{dx}{ds} - (a_2 x - a_4)\frac{dy}{ds} - (x + a_1)\frac{dz}{ds}\right] - \int \Psi_1(s)\, ds = \mathrm{C}_1,$$

$$\mathrm{T}\left[(a_6 y + a_8)\frac{dx}{ds} - (z + a_6 x + a_7)\frac{dy}{ds} + (y + a_5)\frac{dz}{ds}\right] - \int \Psi_2(s)\, ds = \mathrm{C}_2,$$

où C_1, C_2 sont des constantes arbitraires.

2. S'il existe la condition

$$k[a_1 \mathrm{X} + a_2 \mathrm{Y} + a_3 \mathrm{Z} + a_4(y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}) + a_5(z\mathrm{X} - x\mathrm{Z}) + a_6(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})] = \Psi(s),$$

$a_1, a_2, \ldots, a_6$ étant des constantes arbitraires, Ψ une

fonction arbitraire de s, les équations (1) ont l'intégrale

$$\mathrm{T}\left[a_1\frac{dx}{ds}+a_2\frac{dy}{ds}+a_3\frac{dz}{ds}\right.$$
$$+a_4\left(y\frac{dz}{ds}-z\frac{dy}{ds}\right)$$
$$+a_5\left(z\frac{dx}{ds}-x\frac{dz}{ds}\right)$$
$$\left.+a_6\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)\right]+\int\Psi(s)\,ds=\mathrm{C};$$

C est une constante arbitraire.

Ayant appliqué la théorie (¹) de M. Korkine pour résoudre le problème (²) de M. Bertrand sur les intégrales des équations (1), j'ai trouvé les cinq cas cités. Ils sont les seuls, quand il y a des intégrales communes à plusieurs problèmes sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible soumis à l'action d'une force, rapportée à l'unité de masse du fil et dont les composantes sur trois axes rectangulaires de coordonnées x, y, z sont des fonctions de x, y, z et de l'arc s.

[L¹4a]

SUR LA DÉVIATION DANS L'ELLIPSE;

PAR M. A. MANNHEIM.

M. d'Ocagne a publié dans ce Journal, sous le titre : *De la déviation dans l'ellipse* (³), un article, déjà an-

(¹) *Mathematische Annalen*, B. 2, S. 13.

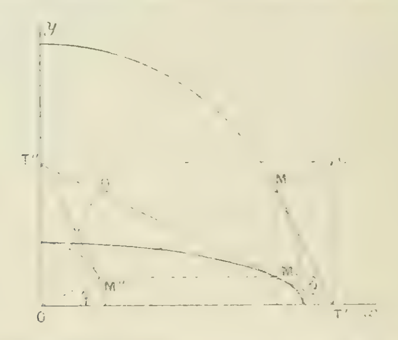
(²) *Journal de Liouville*, t. XVIII. *Mémoire sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique.*

(³) *Voir* Tome V, troisième série, p. 370 et 524; 1886.

cien, au sujet duquel voici quelques remarques géométriques.

M. d'Ocagne appelle *déviation de l'ellipse au point* M, *l'angle* δ, *que la tangente* T'T'' *à l'ellipse, en ce point, fait avec les tangentes correspondantes* T'M', T''M'' *aux cercles décrits sur les axes de l'ellipse comme diamètres*. Il cherche la position du point de l'ellipse pour lequel cet angle atteint son maximum, et donne quelques propriétés relatives à ce point.

Lorsque δ est maximum, pour un déplacement infiniment petit de M_1 sur l'ellipse, sa variation de grandeur est nulle. L'angle $M_1T'M'$ est alors de forme inva-



riable et donne lieu au centre instantané de rotation C, qui est sur la normale à l'ellipse en M_1, sur le rayon OM', et enfin sur la perpendiculaire T'C à Ox.

On peut dire la même chose pour l'angle $M_1T''M''$; le point C est donc aussi sur la perpendiculaire T''C à Oy.

Le point C étant le centre instantané relatif au déplacement de T'T'', *ce segment est de grandeur invariable pour un déplacement infiniment petit de* M_1 *sur l'ellipse.*

Déplaçons T'T'' d'une façon continue dans l'angle xOy; le point M_1 marqué sur ce segment, décrit alors

une ellipse qui n'est autre que l'ellipse donnée, puisque ces deux courbes ont leurs axes dirigés suivant Ox, Oy et qu'au point M_1 la droite M_1C est une normale qui leur est commune. Il résulte de là que M_1 *partage* $T'T''$ *en deux segments respectivement égaux aux demi-axes de l'ellipse donnée.*

Par suite, OC est égal à la demi-somme des axes de l'ellipse, et alors *le segment* M_1C *est égal au demi-diamètre conjugué de* OM_1. Abaissons la perpendiculaire OQ sur $T'T''$. Le rayon de courbure de l'ellipse en M_1 est égal au carré du demi-diamètre parallèle à $T'T''$ divisé par OQ. Mais ce demi-diamètre est égal à M_1C, qui est égal à OQ, donc *le rayon de courbure en* M_1 *est égal à* OQ, ou autrement *on obtient le centre de courbure de l'ellipse pour le point* M_1, *en projetant le centre* O *sur la normale à l'ellipse en ce point.*

La longueur M_1C étant moyenne proportionnelle entre M_1T' et M_1T'', demi-axes de l'ellipse, est facile à déterminer. Avec le segment ainsi obtenu, pour rayon, on décrit du point O une circonférence de cercle. On construit ensuite une tangente à ce cercle de façon que le segment QT' compris entre son point de contact et l'axe Ox soit égal au demi grand axe de l'ellipse; sur cette tangente on prend le symétrique de Q par rapport au milieu de $T'T''$, et l'on obtient le point M_1. Il est facile de retrouver les expressions données par M. d'Ocagne, relatives à l'angle de déviation maximum. Pour arriver à ces expressions, M. d'Ocagne a fait usage de celle qu'il a d'abord établie, et qui donne, quel que soit le point pris sur l'ellipse, la valeur de δ connaissant l'anomalie excentrique φ.

Si, dans cette expression de δ, on donne une autre signification aux lettres qu'elle renferme, on obtient la

formule ([1]) qui détermine, pour une ligne de courbure en un point d'une surface, la tangente de l'angle que fait, avec le plan tangent en ce point à cette surface, l'axe de courbure de cette ligne de courbure.

Cette remarque pourrait donner lieu à un examen particulier.

[O2i]

SUR LES CONIQUES QUI ONT AVEC UNE COURBE DONNÉE EN UN DE SES POINTS UN CONTACT D'ORDRE SUPÉRIEUR (A PROPOS DE LA QUESTION 1737);

Par M. M. d'OCAGNE.

1. Cette Note contient une solution de la question 1737, ainsi que divers développements qui s'y rattachent.

Soit, au point O considéré sur la courbe donnée, C le centre de courbure. Proposons-nous d'étudier l'enveloppe des axes des paraboles qui ont avec la courbe en ce point un contact du second ordre, c'est-à-dire qui sont tangentes en O à la courbe donnée et admettent en ce point le centre de courbure C.

On sait que *la projection du centre de courbure sur le diamètre, en un point d'une parabole, se trouve sur la perpendiculaire élevée à la normale par le point où celle-ci rencontre l'axe* ([2]).

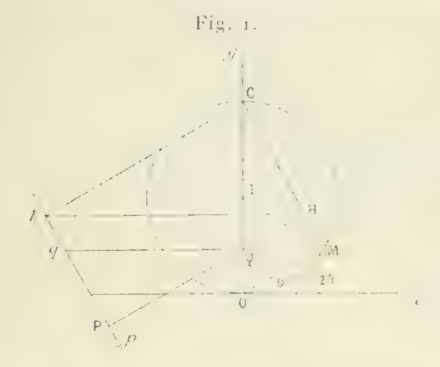
Il résulte de là que si l'on se donne le diamètre OM

([1]) Voir *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 227.

([2]) Ce théorème résulte de l'extension à la parabole de celui que M. Mannheim a démontré pour l'ellipse.

de l'une des paraboles considérées au point O (*fig.* 1), il suffit de projeter le centre de courbure C en M sur

Fig. 1.



OM, puis le point M en Q sur OC, et de tirer par Q la parallèle QP à OM pour avoir l'axe de cette parabole.

L'axe étant ainsi construit, il serait facile d'obtenir son enveloppe, mais, ce problème ayant déjà été résolu, nous le laissons de côté (¹). On sait que cette enveloppe est une hypocycloïde à trois points de rebroussement (dont l'un au point C), engendrée par un cercle de rayon $\frac{R}{2}$ roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{3R}{4}$.

Nous nous contenterons d'indiquer la construction demandée du point P où l'axe touche son enveloppe, et du centre de courbure correspondant p de cette enveloppe.

Si l'on appelle θ l'angle que OM fait avec la tangente Ox, la tangente en M au cercle, décrit sur OC comme diamètre, fait avec Ox l'angle 2θ.

(¹) *Voir* le *Recueil d'Exercices* de Tisserand (2ᵉ édit., 1ʳᵉ Partie, probl. n° 35, p. 73). Nous signalerons à ce propos un défaut de la *fig.* 9 (*loc. cit.*, p. 76). La distance du point O à la droite AC est égale à $\frac{R}{4}$, c'est à dire à $\frac{OB}{4}$.

Par suite, en représentant par $d(Q)$ et $d(M)$ les différentielles des arcs décrits par Q et M, on a

$$\begin{aligned} d(Q) &= d(M)\sin 2\theta, \\ &= MI\sin 2\theta . d(2\theta), \\ &= 2MQ . d\theta. \end{aligned}$$

Mais la normale MQ, au lieu de Q, coupant en q la normale Pp à l'enveloppe de PQ, on a, puisque cette dernière droite fait aussi l'angle θ avec Ox,

$$d(Q) = Qq . d\theta.$$

Par suite,

$$Qq = 2MQ,$$

ou

$$QP = 2HQ.$$

Ainsi, *l'axe* PQ *rencontrant* CM *au point* H, *il suffit de prolonger* HQ *du double de sa longueur pour obtenir le point* P *où l'axe* PQ *touche son enveloppe.*

Remarquons que le lieu du point H n'est autre que la podaire de cette enveloppe par rapport au point C. Si donc h est la projection de ce point C sur la normale Pp à cette enveloppe, Hh est la normale au lieu de H. Il en résulte, d'après un théorème bien connu de M. Mannheim, le rapport $\frac{QP}{HQ}$ étant constant et égal à 2, que

$$\frac{qp}{hq} = 2.$$

Il suffit donc encore de *prolonger* hq *du double de sa longueur pour obtenir le centre de courbure* p.

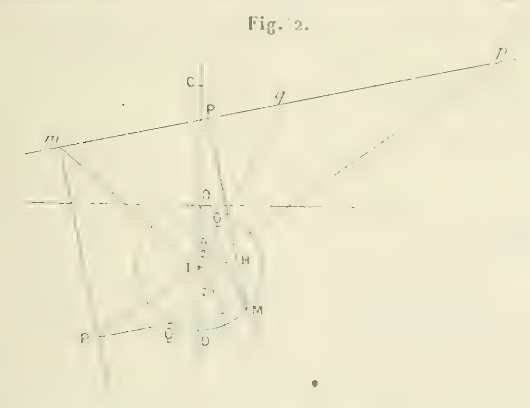
2. Résolvons le même problème pour les axes des hyperboles équilatères qui ont aussi en O un contact du second ordre avec la courbe considérée, c'est-à-dire qui admettent aussi le point C pour centre de courbure.

On sait que, *dans une hyperbole équilatère, la projection du centre de courbure sur le diamètre, en un point, est symétrique du centre par rapport à ce point* (¹).

D'autre part, *les axes sont parallèles aux bissectrices des angles que le diamètre forme avec la normale.*

Si donc nous nous donnons le diamètre OM d'une des hyperboles équilatères considérées en O (*fig.* 2),

Fig. 2.



nous n'avons qu'à projeter en M sur ce diamètre le symétrique D du centre de courbure C par rapport à O pour avoir le centre de cette hyperbole. Le lieu de ce centre est donc le cercle décrit sur OD comme diamètre, résultat connu (²).

Menant par M les parallèles MP et MP' aux bissectrices des angles que OM fait avec OD, on a les axes. Ces axes ont évidemment pour enveloppe une seule et même courbe, car, si le point M fait le tour complet du

(¹) J'ai obtenu ce théorème dans ma Note *Sur les transformations centrales des courbures planes* (n° 9) (*Mathesis*, 1884). J'ai fait voir dans mon *Cours de Géométrie infinitésimale*, p. [illegible], qu'il résulte immédiatement de la construction de M. Mannheim.

(²) TISSERAND, *loc. cit.*, p. [illegible].

cercle, le point Q vient en Q'. Cherchons les points P et P' où ces axes touchent cette enveloppe. Pour cela, appelant encore θ l'angle DOM, remarquons que

$$\mathrm{DIM} = 2\theta.$$

Dès lors

$$d(\mathrm{M}) = 2\,\mathrm{MI}.d\theta.$$

Mais si la normale MI, au lieu que décrit M, coupe en m la normale $\mathrm{P}m$ à l'enveloppe de MP, on a, en remarquant que PM fait avec OD l'angle $\frac{\theta}{2}$,

$$d(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{M}m}{2}\,d\theta.$$

Il résulte de là que

$$\mathrm{M}m = 4\,\mathrm{MI},$$

ou, si H est la projection de I sur MP,

$$\mathrm{MP} = 4\,\mathrm{MH},$$

ou encore, si MP rencontre le cercle en Q,

$$\mathrm{MP} = 2\,\mathrm{MQ}.$$

De même, le second axe touche l'enveloppe au point P', tel que

$$\mathrm{MP'} = 2\,\mathrm{MQ'}.$$

D'ailleurs, il est évident que la normale à l'enveloppe de ce second axe passe aussi par le point m.

J'ai déjà eu l'occasion de rencontrer cette courbe (*Journ. de Math. spéc.*, 2e série, t. V, p. 81; 1886) et j'ai fait voir que c'est une hypocycloïde à trois rebroussements engendrée par un cercle de rayon R roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon 3R.

Si p est le centre de courbure de l'enveloppe répondant au point P, le point Q étant le milieu de MP, le point q est de même le milieu de mp.

Or, les droites MQ et MQ' étant rectangulaires, la

droite QQ′ passe par le centre I du cercle, et comme on a

$$\frac{qp}{mq} = 1 = \frac{Q'P'}{MQ'},$$

il en résulte que les points p et P′ sont en ligne droite avec le centre I. De même pour les points p' et P.

Ainsi *les centres de courbure p et p' répondant aux points* P *et* P′ *sont respectivement sur les droites* IP′ *et* IP.

Remarquons que l'on a aussi

$$\frac{Ip}{IP'} = \frac{Im}{IM} = -3.$$

L'enveloppe des axes est donc homothétique à sa développée par rapport à I.

3. S'il s'agit de construire soit la parabole, soit l'hyperbole équilatère osculatrice en O, c'est-à-dire ayant en ce point un *contact du troisième ordre* avec la courbe donnée, il faut connaître le centre de courbure C_1 de la développée de cette courbe correspondant au point C.

D'après un théorème connu de Maclaurin (¹), il suffit de prolonger C_1C (dans le sens de C_1 vers C) du tiers de sa longueur, et de joindre le point γ ainsi obtenu au point O, pour obtenir le diamètre de toute conique admettant pour centres des deux premières courbures les points C et C_1.

Dès lors, si l'on prend cette direction Oγ pour la droite OM du n° 1, on en déduit l'axe de la parabole osculatrice qui se trouve déterminée par son axe, un de ses points et la tangente en ce point : construction connue.

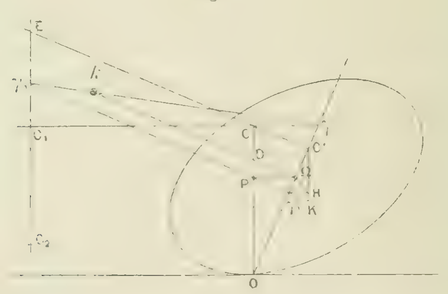
(¹) J'ai donné une démonstration géométrique de ce théorème dans le *Bulletin de la Soc. Math. de France* (t. XX, p. 59).

Si l'on prend la direction $O\gamma_1$ pour la droite OM du n° 2, on en déduit le centre et les axes de l'hyperbole équilatère osculatrice qui se trouve déterminée par ses asymptotes, bissectrices des angles de ses axes, un de ses points et la tangente en ce point, construction également connue (¹).

4. Proposons-nous enfin de construire la conique osculatrice à une courbe donnée en un point donné, c'est-à-dire ayant avec cette courbe un *contact du quatrième ordre*.

Pour cela, établissons, à titre de lemme, la relation qui existe entre le centre de troisième courbure C_2 et le centre Ω de la conique.

Fig. 3.



Nous venons de voir que, si C_1 est le centre de seconde courbure et si la normale CC_1 à la première développée rencontre le diamètre $O\Omega$ en γ, on a

$$\gamma_1 C = \frac{CC_1}{3}.$$

Dès lors, si la normale à la courbe lieu du point γ_1

(¹) Pour ces constructions, *voir* mon *Cours*, p. 41 et 42.

(*lorsque le point* O *décrit la conique*) rencontre la normale C_1C_2 à la seconde développée au point γ_1, on a

$$\gamma_1 C_1 = \frac{C_1 C_2}{3}.$$

Cela posé, on a, dans le triangle OCγ, en appelant D et k les points où les normales en O et γ à la conique (O) et à la courbe (γ) rencontrent la normale à l'enveloppe de Oγ, c'est-à-dire la perpendiculaire élevée à ce diamètre par le centre Ω,

$$\frac{d(O)}{d(C)} = \frac{OC}{CC_1}, \qquad \frac{d(C)}{d(\gamma)} = \frac{CC_1}{\gamma\gamma_1}, \qquad \frac{d(\gamma)}{d(O)} = \frac{\gamma k}{OD}.$$

On tire de là, en multipliant membre à membre,

$$\frac{OC}{OD} = \frac{\gamma\gamma_1}{\gamma k}.$$

Donc, si C′ et γ'_1 sont les projections de C et γ sur OΩ,

$$\frac{OC'}{O\Omega} = \frac{\gamma\gamma'_1}{\gamma\Omega}.$$

Il résulte de là que *les parallèles à* OC *et* γC, *menées respectivement par* C′ *et par* γ'_1, *se coupent en* H *sur la droite* CΩ (¹).

De là la construction du centre Ω, lorsque les centres des trois premières courbures C, C_1, C_2 sont donnés :

Prolonger C_1C *et* C_2C_1 *du tiers de leur longueur en* Cγ *et* $C_1\gamma_1$; *projeter* γ_1 *et* C *en* γ'_1 *et* C′ *sur* Oγ, *et tirer par* γ'_1 *et* C′ *des parallèles respectivement à* Cγ *et à* CO, *qui se coupent en* H. *La droite* CH *rencontre* Oγ *au centre* Ω *demandé.*

On est, dès lors, ramené à ce problème : *Construire*

(¹) Comparer : *Cours de Géométrie descriptive* de M. Mannheim, 2ᵉ édit., p. 208.

la conique (O), *qui passe au point* O *où son centre de courbure est* C *et qui admet pour centre le point* Ω.

Le problème sera résolu si nous connaissons la longueur du diamètre conjugué de ΩO, dirigé suivant la perpendiculaire ΩP abaissée du centre Ω sur la normale OC.

Or, on sait ([1]) que *la longueur de ce demi-diamètre conjugué est la moyenne géométrique de* OP *et de* OC.

Si les segments OP et OC sont de même sens, ce demi-diamètre est réel, la conique osculatrice est une ellipse, et l'on est finalement ramené à ce problème bien connu : construire une ellipse connaissant un système de deux diamètres conjugués.

Si les segments OP et OC sont de sens contraires, ce demi-diamètre est imaginaire, et la conique osculatrice est une hyperbole; mais la moyenne géométrique des valeurs absolues de OP et de OC donne le demi-diamètre de l'hyperbole complémentaire dirigé suivant OP, et l'on est ramené à un problème non moins connu que le précédent.

5. Soient K le point où C′H rencontre $\gamma_1\gamma'_1$, E le point où CC′ rencontre $C_1\gamma_1$. On a

$$(1)\qquad C_1\gamma_1 = C_1E - \gamma_1E.$$

Or, si l'on appelle ρ, ρ_1, ρ_2 les rayons OC, CC_1, CC_2,

([1]) Ce théorème est une conséquence immédiate d'un théorème de Chasles qui peut s'énoncer ainsi : *Si sur la normale en un point* O *d'une conique on porte de part et d'autre de ce point des segments égaux au demi-diamètre conjugué de celui qui aboutit en* O, *les extrémités de ces segments sont conjuguées harmoniques par rapport au centre de courbure* C *répondant au point* O *et à la projection* P *du centre* Ω *sur la normale* OC.

Je suis, de mon côté, parvenu à ce théorème par une voie tout élémentaire (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIX, p. 269; 1880).

on a

(2) $$C_1\gamma_1 = \frac{C_2C_1}{3} = \frac{\rho_2}{3}.$$

En outre,

$$\frac{C_1E}{CC_1} = \frac{C\gamma}{OC},$$

d'où

(3) $$C_1E = \frac{CC_1 . C\gamma}{OC} = \frac{\rho_1^2}{3\rho},$$

et

$$\frac{C'K}{C'\gamma'_1} = \frac{O\gamma}{OC},$$

d'où

$$C'K = \frac{C'\gamma'_1 . O\gamma}{OC}.$$

Mais

$$\frac{C'\gamma'_1}{O\gamma} = \frac{C'H}{OC} = \frac{\Omega C'}{\Omega O}.$$

Si donc nous représentons par λ *le rapport* $\frac{\Omega C'}{\Omega O}$ *pris avec son signe, nous avons*

$$C'\gamma'_1 = \lambda O\gamma.$$

Par suite,

$$C'K = \frac{\lambda\overline{O\gamma}^2}{OC} = \frac{\lambda}{\rho}\left(\rho^2 + \frac{\rho_1^2}{9}\right)$$

et

(4) $$\gamma_1E = -C'K = -\lambda\left(\rho + \frac{\rho_1^2}{9\rho}\right).$$

Remplaçant, dans (1), $C_1\gamma_1$, C_1E et γ_1E par leurs valeurs (2), (3), (4), on obtient

$$\rho_2 = \frac{\rho_1^2}{\rho} + \lambda\left(3\rho + \frac{\rho_1^2}{3\rho}\right).$$

Si la conique osculatrice est une parabole $\lambda = 1$ et

$$\rho_2 = 3\rho + \frac{4\rho_1^2}{3\rho}.$$

Cette formule peut s'interpréter géométriquement

comme suit [1] : *Soient* I *le point obtenu en prolongeant la normale* OC *vers l'extérieur de la courbe de la quantité* $OI = \frac{\rho}{2}$, *et* S *le symétrique du centre de seconde courbure* C_1 *par rapport à* I. *La perpendiculaire élevée en* S *à* C_1S *passe par le centre de troisième courbure* C_2.

Lorsque cette condition est vérifiée, il existe donc au point O une parabole ayant avec la courbe un contact du quatrième ordre, c'est-à-dire une *parabole surosculatrice*.

[M[1]5cα]

IDENTITÉ DE LA STROPHOIDE AVEC LA FOCALE A NŒUD. SON APPLICATION A L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE;

Par M. Gino LORIA,

Professeur à la Faculté des Sciences de Gênes (Italie).

(Extrait d'une lettre adressée à M. Laisant.)

.... Vous vous rappelez sans doute l'histoire de la strophoïde. Découverte par Torricelli, qui la considérait comme le lieu des foyers des sections planes produites dans un cône droit par les plans qui passent par une tangente perpendiculaire à une des génératrices du cône, elle a été étudiée à ce point de vue par Guide Grandi, dans un Traité inédit, et après par Grégoire Cazalis, dans deux remarquables Mémoires. Indépendamment de ces géomètres, elle a été définie de la même manière, en 1819, par Quetelet et étudiée ensuite par Dandelin et Chasles. D'autre part, elle a été définie et traitée (particulièrement la strophoïde droite) dans le plan par un grand nombre de géomètres, qui l'engen-

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

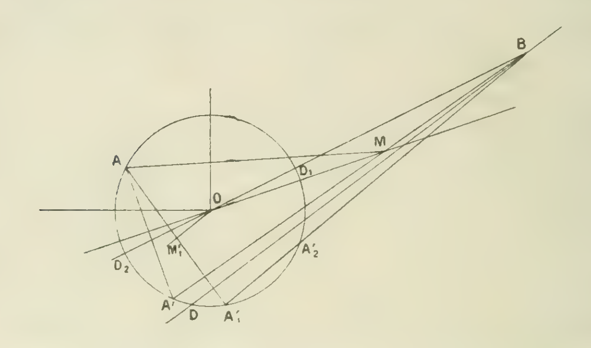
draient au moyen d'un angle donné par le procédé bien connu que je rappellerai plus bas : on n'a peut-être pas remarqué que le premier entre ces géomètres est A. de Moivre, dont on a une Note : *A ready description and quadrature of a curve of the third order, resembling that commonly called the Foliate,* dans les *Phil. Transactions* de l'année 1715.

Or, pour établir un lien entre les recherches sur la strophoïde définie *in solido* et celle dont le point de départ est la définition *in plano,* on peut employer un raisonnement très simple et tout à fait élémentaire dont Quetelet et Dandelin ont fait usage (*voir* notamment *Mathesis*, t. VI, p. 222).

Permettez-moi de profiter de cette occasion pour fixer un instant votre attention sur un problème d'Optique géométrique qui est résolu par la strophoïde. C'est une question résolue par M. E. Sang (*voir* la Note *On the curves produced by reflection from a polisphed revolving straight wire,* qui se trouve dans les *Trans. of the R. Society of Edinburgh*, Vol. XXVIII, Part I, p. 273-276 ; 1877) qui l'a traitée par la Géométrie analytique, sans toutefois remarquer que la courbe dont il donne l'équation n'est autre chose qu'une strophoïde oblique ; en conséquence, il a imaginé une nouvelle méthode pour construire cette courbe, méthode qu'on peut joindre à toutes les autres connues.

Voici le problème optique dont il s'agit : Dans un plan sont placés en A un point lumineux et en B l'œil d'un observateur ; soit O un point fixe du même plan, autour duquel tourne une droite réfléchissante *s* (miroir) ; à chaque position de *s* correspond un rayon lumineux sortant de A et se réfléchissant en B : quel est le lieu géométrique de tous les points d'incidence M ? Pour répondre à cette question, je remarque qu'étant prise

arbitrairement une position du miroir s, pour trouver la position correspondante du point M, il suffit de trouver le point A′ symétrique de A par rapport à s, de le joindre par



une droite à B et de déterminer l'intersection des droites A′B et s. Or, le lieu des points A′ est le cercle C de centre O et de rayon OA. Donc notre courbe est engendrée par deux faisceaux de rayons dont les centres sont O et B, et entre lesquels existe une correspondance algébrique (1, 2). A chaque rayon s du premier faisceau correspond la droite qui joint B au symétrique A′ de A par rapport à s. Et pour tracer les rayons du premier faisceau, qui correspondent à un rayon r du premier, déterminons les intersections A'_1, A'_2 du rayon r et du cercle C; les normales abaissées de O sur les droites AA'_1 et AA'_2 seront les rayons cherchés, et les points $rs_1 = M_1$, $rs_2 = M_2$ seront deux points de la courbe. Il s'ensuit que cette courbe est du troisième ordre et a un point double en O et un point simple en B. Si l'on suppose que s passe par un des points circulaires à l'infini, on verra que ce point est situé sur la courbe; celle-ci est donc une cubique circulaire non moins que rationnelle. Pour avoir les tangentes de la courbe en B et en O, il suffit de trouver dans chaque faisceau le rayon (ou

le couple de rayons) qui correspond à la droite qui joint les deux centres. En conséquence, la tangente en B n'est autre que la droite qui joint B au symétrique D du point A par rapport au diamètre OB; et, pour trouver les tangentes en O, on marque les extrémités D_1 et D_2 du diamètre OB, et les normales aux cordes AD_1 et AD_2 seront les tangentes à la courbe. Comme ces tangentes sont évidemment perpendiculaires entre elles, nous concluons que *le lieu cherché est une cubique circulaire qui a un point double à tangentes orthogonales*. C'est donc une strophoïde, comme je l'avais annoncé. ....

[D1b]

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES DES POLYNOMES DE M. LÉAUTÉ;

PAR M. PAUL APPELL.

Pour exprimer une fonction $f(x)$, connaissant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées dans un intervalle donné, de $-h$ à $+h$, par exemple, M. Léauté (*Comptes rendus*, 14 juin 1880; *Journal de Liouville*, 1881) a considéré une suite de polynomes $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ de degrés $0, 1, 2, \ldots, n$ en x, possédant les propriétés caractéristiques suivantes :

$$P_0 = 1; \tag{1}$$

$$\frac{dP_n}{dx} = P_{n-1}, \qquad (n \geq 1); \tag{2}$$

$$\int_{-h}^{+h} P_n \, dx = 0, \qquad (n \geq 1). \tag{3}$$

La relation (2) permet de déduire chaque polynome du précédent par une quadrature, et la condition (3)

détermine la constante arbitraire introduite par cette quadrature.

Ces polynomes P_n sont homogènes et de degré n en x et h. Mettons ces deux quantités en évidence en appelant le polynome

$$P_n(x, h).$$

Nous ramènerons h à avoir la valeur π, en faisant

$$x = \frac{hx'}{\pi};$$

on a alors

$$P_n(x, h) = P_n\left(\frac{h}{\pi}x', h\right) = \frac{h^n}{\pi^n} P_n(x', \pi).$$

Les polynomes $P_n(x', \pi)$ possèdent donc les propriétés caractéristiques suivantes

$$P_0 = 1, \qquad \frac{dP_n}{dx'} = P_{n-1}, \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} P_n\,dx' = 0, \qquad n \geq 1.$$

Le polynome P_1 est égal à x'. On sait que dans les limites $-\pi$ et $+\pi$, x' peut être représenté par la série trigonométrique

$$(4) \qquad P_1 = x' = 2\left(\sin x' - \frac{1}{2}\sin 2x' + \frac{1}{3}\sin 3x' - \ldots\right)$$

(*voyez* Bertrand, *Calcul intégral*, n° 551).

On a ainsi le développement de P_1 entre $-\pi$ et $+\pi$.

Pour avoir celui de P_2, multiplions par dx' les deux membres de (4) et intégrons; il vient

$$P_2 = c_2 - 2\left(\cos x' - \frac{1}{4}\cos 2x' + \frac{1}{9}\cos 3x' - \ldots\right),$$

où c_2 est une constante d'intégration, car P_2 est une fonction primitive de P_1. Pour déterminer c_2, écrivons

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_2\,dx' = 0$$

Nous aurons, en remplaçant P_2 par la série et remarquant que tous les termes $\cos x'$, $\cos 2x'$, ... ont leurs intégrales nulles,

$$2\pi c_2 = 0, \qquad c_2 = 0,$$

donc

$$(5) \qquad P_2 = -2\left(\cos x' - \frac{1}{2^2}\cos 2x' + \frac{1}{3^2}\cos 3x' - \ldots\right).$$

Intégrant de nouveau et déterminant de même la constante d'intégration par la condition

$$\int_{-\pi}^{+\pi} P_3\,dx' = 0,$$

on trouve qu'elle est nulle, et l'on a

$$(6) \qquad P_3 = -2\left(\sin x' - \frac{1}{2^3}\sin 2x' + \frac{1}{3^3}\sin 3x' - \ldots\right);$$

et ainsi de suite. En général, m étant un entier positif,

$$P_{2m} = (-1)^m 2\left(\cos x' - \frac{1}{2^{2m}}\cos 2x' + \frac{1}{3^{2m}}\cos 3x' - \ldots\right),$$

$$P_{2m+1} = (-1)^m 2\left(\sin x' - \frac{1}{2^{2m+1}}\sin 2x' + \frac{1}{3^{2m+1}}\sin 3x' - \ldots\right).$$

Ces formules donnent, en particulier, les valeurs asymptotiques des polynomes P_n pour n très grand.

Si l'on revient à la variable x, on a

$$x' = \frac{\pi x}{h},$$

$$P_n(x, h) = \frac{h^n}{\pi^n} P_n(x', \pi).$$

Donc, pour n pair, $n = 2m$,

$$P_{2m} = (-1)^m 2\frac{h^{2m}}{\pi^{2m}}\left(\cos\frac{\pi x}{h} - \frac{1}{2^{2m}}\cos\frac{2\pi x}{h} + \frac{1}{3^{2m}}\cos\frac{3\pi x}{h} - \ldots\right),$$

et pour n impair, $n = 2m+1$,

$$P_{2m+1} = (-1)^m 2\frac{h^{2m+1}}{\pi^{2m+1}}\left(\sin\frac{\pi x}{h} - \frac{1}{2^{2m+1}}\sin\frac{2\pi x}{h} + \frac{1}{3^{2m+1}}\sin\frac{3\pi x}{h} - \ldots\right).$$

Ces développements font ressortir les rapports signalés par M. Halphen entre les polynomes de M. Léauté et les polynomes de Bernoulli.

Ils se rattachent également à deux questions posées par M. Cesàro dans l'*Intermédiaire* (mars 1897), questions 1019 et 1017.

Faisons, en effet, $h = 1$, et désignons par $\varphi_{2m}(x)$ et $\varphi_{2m+1}(x)$ les deux séries ci-dessus

$$\varphi_{2m}(x) = \cos\pi x - \frac{1}{2^{2m}}\cos 2\pi x + \frac{1}{3^{2m}}\cos 3\pi x - \ldots.$$

$$\varphi_{2m+1}(x) = \sin\pi x - \frac{1}{2^{2m+1}}\sin 2\pi x + \frac{1}{3^{2m+1}}\sin 3\pi x - \ldots.$$

On a évidemment

$$\varphi_{2m}(x) - \varphi_{2m}(x-1) = 2\left(\cos\pi x - \frac{1}{3^{2m}}\cos 3\pi x + \frac{1}{5^{2m}}\cos 5\pi x + \ldots\right).$$

C'est la série considérée par M. Cesàro dans la question 1019.

De même

$$\varphi_{2m+1}(x) - \varphi_{2m+1}(x-1) = 2\left(\sin\pi x + \frac{1}{3^{2m+1}}\sin 3\pi x + \frac{1}{5^{2m+1}}\sin 5\pi x + \ldots\right).$$

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE NOVEMBRE 1896. — COMPOSITIONS.

Lille.

ANALYSE. — *Supposant connue la définition de l'intégrale définie d'une fonction continue entre deux*

limites finies, étendre cette définition au cas où l'une des limites devient infinie. Dans le cas où la fonction à intégrer est une fraction rationnelle, énoncer et démontrer la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse étendre jusqu'à l'infini les limites de l'intégration.

Mécanique. — I. *Dans la théorie des courbes funiculaires, on étudiera les questions suivantes :*

1° *Équations d'équilibre d'un fil;*

2° *Équations intrinsèques;*

3° *Formule donnant la tension quand il existe une fonction des forces;*

4° *Équilibre d'un fil tendu sans frottement sur une surface fixe et soumis seulement aux forces appliquées à ses extrémités et aux réactions de la surface.*

II. *Deux points matériels pesants, dont les masses sont égales à l'unité, se meuvent sans frottement, l'un sur une droite verticale fixe, l'autre sur un plan fixe qui fait avec la verticale un angle égal à α; les deux points s'attirent proportionnellement à leur distance : étudier le mouvement.*

On prendra pour axe des z la verticale sur laquelle se meut le premier point, et pour axes des x et des y deux droites rectangulaires situées dans le plan fixe, l'axe des x étant une horizontale de ce plan.

Astronomie. — *En un lieu de colatitude γ, calculer pour l'époque sidérale t l'angle x de l'écliptique avec l'horizon et l'azimut y du point de rencontre de ces deux plans. On connaît l'obliquité ω de l'écliptique.*

Application numérique :

$t = 2^h 17^m 36^s,02, \qquad \gamma = 39°21'16'',0, \qquad \omega = 23°27'10'',76.$

SESSION DE MARS-AVRIL 1897. — COMPOSITIONS.

Besançon.

Analyse. — I. *Étant donnée une circonférence* S, *déterminer une courbe* C, *telle que* M *étant un point quelconque pris sur la courbe* C, P *étant la polaire du point* M *par rapport à* S, C′ *l'enveloppe de cette polaire*, M′ *le point où* P *touche* C′, *la distance* MM′ *soit une constante donnée l indépendante de la position du point* M *sur la courbe* C. *Soit* O *le centre de* S : *étudier les variations de l'angle que fait la droite* MM′ *avec* OM. *Calculer la relation qui a lieu entre les rayons* OM *et* OM′, *ainsi que les angles que font les tangentes en* M *et en* M′ *aux courbes* C *et* C′ *respectivement avec les rayons* OM *et* OM′. *On étudiera la nature et la disposition de la courbe* C′.

II. *Calculer l'intégrale définie* $\int_0^\infty e^{-x^2}\cos x\,dx$.

La seconde question étant classique, je me borne à indiquer la solution de la première. En désignant par r et θ les coordonnées polaires de M, par x et y les coordonnées rectilignes de M′, on a

$$x = \frac{R^2}{r^2}(r\cos\theta - r'\sin\theta), \qquad y = \frac{R^2}{r^2}(r\sin\theta - r'\cos\theta),$$

où $r' = \frac{dr}{d\theta}$; et, en exprimant la condition de l'énoncé, on est conduit à l'équation

$$d\theta = \frac{R^2\,dr}{r\sqrt{l^2 r^2 - (R^2 - r^2)^2}}.$$

dont l'intégration est facile; a et b étant deux constantes déterminées par les équations

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{2R^2 + l^2}{R^4}, \qquad \frac{1}{a^2 b^2} = \frac{1}{R^4},$$

on a

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2(\theta - \theta_0)}{a^2} + \frac{\sin^2(\theta - \theta_0)}{b^2}.$$

La courbe C est par suite une ellipse. La courbe C′ est une ellipse égale à celle-ci, mais dont l'orientation diffère de 90° de celle de C. On reconnaît facilement que l'angle de MM′ avec OM varie toujours dans le même sens. En désignant OM′ par r_1, on a

$$r^2 + r_1^2 = a^2 + b^2.$$

Enfin, V étant l'angle de la courbe C avec OM, on a

$$\sin V = \frac{R^2}{r r_1},$$

et la symétrie de cette formule montre que cet angle égale celui que fait la courbe C′ avec OM′.

Mécanique. — *Une barre pesante* AB *est reliée à un poids* P *situé sur la perpendiculaire élevée en son milieu; la base repose sur une chaînette renversée dont l'axe est vertical. Le poids* P *étant situé sur l'axe dans la position d'équilibre, étant donné que la barre roule sur la chaînette sans glisser, trouver en fonction du temps l'angle de* CP *avec la verticale.*

Le travail de la réaction étant nul, on peut employer le principe des forces vives. La force vive du système est la force vive du centre de gravité augmentée de la force vive due à la rotation. θ étant l'angle que fait la

barre avec la base de la chaînette, x l'abscisse du point de contact, les coordonnées du centre de gravité G ont des expressions de la forme

$$x_1 = x - (a - l)\sin\theta,$$
$$y_1 = (a - l)\cos\theta;$$

d'ailleurs

$$dx = \frac{a\,d\theta}{\cos\theta},$$

et l'on arrive à une équation de la forme

$$(a^2 \operatorname{tang}^2\theta + l^2 + k^2)\frac{d\theta^2}{dt^2} = 2g(a - l)\cos\theta - \text{H}.$$

Caen.

Analyse et Géométrie. — I. *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + y + u - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

où u désigne une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y, on demande d'en déterminer l'intégrale particulière qui se réduit à $2y$ pour $x = 0$.

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, chercher les surfaces réglées Σ satisfaisant à la double condition :*

1° *Que leurs génératrices restent constamment parallèles au plan xOz;*

2° *Que les tangentes aux deux lignes de courbure qui passent en un point quelconque d'une surface Σ se projettent sur le plan xOy suivant deux droites également inclinées sur Ox.*

I. La méthode la plus nouvelle (Lagrange et Charpit) consiste à associer à l'équation proposée une équation

qui permette de calculer les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. Si l'on désigne ces dérivées par p et q, on peut prendre pour l'equation adjointe une intégrale quelconque du système

$$\frac{dx}{-1} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2q^2 - p} = -\frac{dp}{1+p} = -\frac{dq}{1+q};$$

égalant la première et la dernière fraction, on a l'intégrale

$$x = \log \frac{1+q}{C}, \qquad q = Ce^x - 1.$$

On en conclut d'abord que u doit être de la forme

$$(1) \qquad u = (Ce^x - 1)y + \varphi(x);$$

d'ailleurs, $\frac{\partial u}{\partial x}$ est donnée par l'équation proposée et l'on doit avoir

$$Ce^x y + \varphi'(x) = x + y + (Ce^x - 1)y + \varphi(x) + (Ce^x - 1)^2;$$

ou, en simplifiant,

$$\varphi'(x) - \varphi(x) = x + (Ce^x - 1)^2;$$

intégrant cette équation linéaire et reportant dans la formule (1)

$$u = (Ce^x - 1)y - x - 2 + C^2 e^{2x} - 2Cxe^x + C'e^x.$$

C'est une intégrale complète dont on sait tirer l'intégrale générale; mais il convient de voir si elle ne se réduit pas à $2y$ pour des valeurs convenables de C et C'; il suffit visiblement de faire $C = 3$, $C' = -7$.

II. L'équation des surfaces cherchées est de la forme

$$(1) \qquad z = x F(y) + \varphi(y).$$

L'équation aux coefficients angulaires des tangentes

aux projections des lignes de courbure sur OXY est

$$[(1+q^2)s - pqt]m^2 - [(1+q^2)r - (1+p^2)t]m + \ldots = 0.$$

Le coefficient de m doit être nul : or (1) r est nul : cette condition revient à $t = 0$, soit

$$xF''(y) + \varphi''(y) = 0;$$

$F''(y)$ et $\varphi''(y)$ sont nuls et l'on a

$$z = axy + bx + cy + f.$$

Mécanique. — I. *Établir les formules propres à déterminer, pour un instant donné, l'accélération des divers points d'un solide qui se meut autour d'un point fixe. Simplifier ces formules par un choix convenable des axes coordonnées : théorème de Rivals. Lieu des points du solide dont l'accélération tangentielle a une grandeur donnée, en supposant que la grandeur de la vitesse de la rotation instantanée ne varie pas avec le temps.*

II. *Deux points* A, B, *de masses égales à l'unité, sont liés l'un à l'autre par une tige de masse négligeable et de longueur constante* $2a$. *Le point* A *est assujetti à rester sur une droite* OZ *fixe et parfaitement polie; le point* B, *qui peut se mouvoir librement, sauf sa liaison avec* A, *est attiré vers* OZ *avec une intensité égale au produit de sa distance à* OZ *par une constante* ω^2. *A l'instant initial, l'angle* BAZ *est égal à* 30°; *la vitesse du point* A *est nulle; celle du point* B, *égale à* $\omega a\sqrt{8}$, *a une direction perpendiculaire sur* OZ.

Déterminer le mouvement du système : lignes décrites par B *et par le point milieu de* AB.

I. Prenons l'axe instantané pour axes des z et le plan tangent au cône décrit par cet axe pour plan des zx;

$p, q, \frac{dq}{dt}$ sont nuls; si, en outre, ω est constant, $\frac{dr}{dt}$ sera aussi nul; les composantes de l'accélération sont de la forme

$$J_x = -\omega^2 x, \qquad J_y = -z\frac{dp}{dt} - \omega^2 y, \qquad J_z = y\frac{dp}{dt};$$

l'accélération tangentielle est

$$-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}J_x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}J_y = -\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dp}{dt};$$

les points pour lesquels elle a une valeur donnée sont sur un conoïde défini par une équation de la forme

$$z = C\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}.$$

II. Les forces qui agissent sur A et B sont perpendiculaires à OZ ainsi que la vitesse initiale du milieu M de AB; M, qui est le centre de gravité, restera dans un plan normal à OZ et que je prends pour plan des xy. Les coordonnées de B sont de la forme

$$x = 2a\sin\theta\cos\psi, \qquad y = 2a\sin\theta\sin\psi, \qquad z = a\cos\theta,$$

celles de A étant $0, 0, -a\cos\theta$.

Le théorème des aires projetées sur OXY donne

$$(1) \qquad \sin^2\theta\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}.$$

On a, en outre, l'intégrale des forces vives

$$4a^2\left(\cos^2\theta\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}\right) + 2a^2\sin^2\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}$$
$$= 8a^2\omega^2 - \omega^2a^2(4\sin^2\theta - 1).$$

Remplaçons $\frac{d\psi}{dt}$ par sa valeur (1) et simplifions : on pourra diviser par le demi-coefficient de $\frac{d\theta^2}{dt^2}$, soit par

$a^2(2 - \sin^2\theta)$, et l'on aura

$$2\frac{d\theta^2}{dt^2} - \omega^2\frac{4\sin^2\theta - 1}{\sin^2\theta} = \omega^2\frac{3 - 4\cos^2\theta}{\sin^2\theta};$$

$$\frac{\omega\, dt}{\sqrt{2}} = \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{3 - 4\cos^2\theta}}, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega t\sqrt{2}.$$

Dans (1), remplaçons dt par sa valeur

$$d\psi = \frac{d\theta}{\sin\theta\sqrt{3 - 4\cos^2\theta}} = \frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{3 - \cot^2\theta}};$$

(2) $$\cot\theta = \sqrt{3}\cos\psi.$$

La loi du mouvement est bien simple. Si l'on élimine θ et ψ entre les équations qui donnent les coordonnées de B et l'équation (2), on trouve

$$\frac{z}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 4x^2 - y^2 = 4a^2;$$

la trajectoire de B est une ellipse; celle de M est de même définie par les équations

$$z = 0, \qquad 4x^2 - y^2 = a^2.$$

J'ajoute que AB décrit une surface dont l'équation est

$$(4x^2 - y^2)(x\sqrt{3} - z)^2 = 3a^2x^2.$$

Épreuve pratique. — *Deux stations, dont les longitudes diffèrent de 180°, ont une même latitude boréale. Il s'écoule $5^h 30^m$ de temps sidéral entre l'instant où Régulus se lève pour l'une des stations et celui où la même étoile se couche pour l'autre station; la déclinaison de Régulus est boréale et égale à 12° 29′ 26″.*

Calculer la latitude commune des deux stations, en ne tenant pas compte de la réfraction atmosphérique.

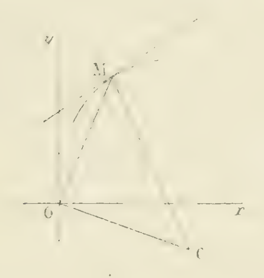
On trouve pour la latitude demandée 71° 25′ 44″,8.

Grenoble.

Analyse. — I. *Étant donnée l'équation d'une famille de courbes*

$$\varphi = x\sin\theta - y\cos\theta - f(\theta) = 0,$$

déterminer $f(\theta)$ par la condition que le triangle qui a pour sommets l'origine O, un point M de l'enveloppe



des droites et le centre de courbure correspondant C soit rectangle et isoscèle. Courbe enveloppe des droites considérées.

Les coordonnées de M sont données par $\varphi = 0$, $\varphi'_\theta = 0$; celles de C par $\varphi'_\theta = 0$, $\varphi''_\theta = 0$, les droites $\varphi'_\theta = 0$, $\varphi_\theta = 0$ étant rectangulaires.

On a

$$\overline{OC}^2 = f'^2 + f''^2, \quad \overline{OM}^2 = f^2 + f'^2, \quad \overline{MC}^2 = (f + f'')^2.$$

Les conditions

$$OM = OC, \quad \overline{CM}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OC}^2$$

conduisent à

$$f = \pm f' = f'',$$

d'où

$$f = ae^{\pm\theta}.$$

ce qui donne une spirale logarithmique pour la courbe cherchée.

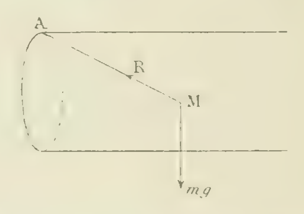
II. *Calculer les intégrales*

$$u = \int_0^x \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx, \qquad v = \int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$$

On trouve

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}, \qquad v = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

MÉCANIQUE. — *Un point matériel pesant M, de masse m, assujetti à se mouvoir sans frottement sur la surface d'un cylindre de révolution, de rayon a, dont les génératrices sont horizontales, est attiré de plus*



par un point A situé sur la génératrice la plus élevée du cylindre proportionnellement à sa distance r à ce point A. La force d'attraction sera représentée par $R = -m\mu^2 r$. *A l'origine le point matériel est placé en un point* M_0 *sur la génératrice du point A avec une vitesse* v_0 *perpendiculaire à* AM_0. *On demande le mouvement du point et la réaction de la surface dans le cas général où* μ *est quelconque.*

Examiner le cas suivant : on a $\mu^2 = \frac{g}{a}$.

Démontrer que dans ce cas la trajectoire est algébrique toutes les fois que le rapport $\frac{\mu a}{v_0}$ *est commensu-*

rable, et voir plus particulièrement ce qu'elle est lorsque $\frac{\mu a}{v_0} = 1$.

Le mouvement de la projection sur la génératrice du point A est un mouvement périodique dont la période est $\frac{2\pi}{\mu}$. Le mouvement de la projection sur la section droite du cylindre est le même que celui d'un point qui serait sollicité par une force verticale constante, mais dont la direction serait celle de la pesanteur ou la direction opposée suivant que $g - \mu^2 a$ est positif ou négatif. Dans tous les cas c'est un mouvement pendulaire. La réaction seule est changée.

Dans le cas où $\mu^2 = \frac{g}{a}$, la projection parcourt le cercle avec une vitesse angulaire constante et le mouvement dans l'espace est le même que celui d'un point qui serait attiré vers le centre O de la section droite du point A proportionnellement à la distance. Lorsque $\frac{\mu a}{v_0} = 1$, la réaction devient nulle, et le point décrit l'ellipse section du cylindre par le plan qui contient O et v_0.

Astronomie. — *A* $2^h 19^m 4^s,85$, *temps solaire vrai, la hauteur corrigée du centre du Soleil est*

$$h = 14^\circ 28' 12''.$$

Calculer la latitude λ *du lieu, la déclinaison* ω *du Soleil étant* $\omega = -23^\circ 22' 31'',45$.

Déterminer l'influence qu'aurait une erreur de ± 1 *seconde sur l'heure vraie relativement à la détermination de la latitude.*

Si α est l'angle horaire du Soleil, et φ un angle

auxiliaire défini par $\tang\varphi = \cot\omega \cos\alpha$, on aura

$$\sin(\lambda + \varphi) = \frac{\sin h \cos\varphi}{\sin\omega},$$

$$d\lambda = \frac{\cos\lambda \sin\varphi \tang\alpha}{\cos(\lambda - \varphi)} d\alpha.$$

On trouve successivement

$$\begin{aligned}
\alpha &= 34^\circ.46'.12'',75 \\
\varphi &= -62.14.51,06 \\
\lambda &= 45.11.38,32 \\
d\lambda &= \pm 6,79 \text{ pour } d\alpha = \pm 15''.
\end{aligned}$$

Marseille.

Analyse. — *On considère les sections planes normales au paraboloïde* $xy = kz$ *aux points d'intersection de cette surface et du cylindre de révolution* $x^2 + y^2 = \rho^2$, *et tangentes à la courbe :*

1° *Exprimer le rayon de courbure de cette section plane en fonction du* z *du point mobile sur la courbe, et étudier sa loi de variation quand le point mobile décrit toute cette courbe.*

2° *Y a-t-il des points où la section plane soit tangente à l'une des lignes de courbure qui passent au point de la courbe d'intersection?*

3° *Distinguer cette ligne de courbure de l'autre ligne de courbure, et pour cela déterminer d'abord les lignes de courbure du paraboloïde hyperbolique.*

4° *Démontrer enfin que les lignes de courbure du paraboloïde hyperbolique sont les lieux des points tels que leurs distances aux deux génératrices rectilignes qui passent au sommet aient une somme ou une différence constante.*

Mécanique. — *Dans un plan horizontal on donne*

une droite fixe Ox *et deux points matériels* A *et* B *ayant chacun pour masse l'unité.*

Le point A *est assujetti à glisser sans frottement sur la droite* Ox, *le point* B *se meut librement dans le plan.*

Les deux points A *et* B *s'attirent mutuellement proportionnellement à la distance, et leur attraction à l'unité de distance est* k^2.

Ces deux points sont aussi tous deux attirés par le point O *proportionnellement à la distance, et l'attraction exercée sur chacun d'eux par le point* O *à l'unité de distance est* h^2.

On a d'ailleurs $k^2 = \frac{5}{4} h^2$.

Trouver le mouvement de ces deux points, et aussi le mouvement relatif de B *par rapport à* A.

Cas particulier :

A l'origine du mouvement : 1° *les points sont sans vitesse;* 2° *la droite* OA *est égale à* a; 3° *la distance* AB *est égal à* a; 4° *la droite* AB *est perpendiculaire sur* Ox.

Astronomie. — *Étant données les coordonnées équatoriales* (α, δ), (α', δ') *de deux étoiles, on demande de calculer les coordonnées équatoriales* (α_1, δ_1) *du pôle boréal du grand cercle qui passe par ces étoiles.*

Données numériques :

$$\alpha = 109°36'19'',8 \qquad \delta = -15°27'34'',3$$
$$\alpha' = 217°58'18'',6 \qquad \delta' = +42°19'13'',6.$$

Résultats :

$$\alpha_1 = 37°17'17'',76. \qquad \delta_1 = 47°40'39'',00.$$

Paris.

Analyse. — I. *Trouver les courbes qui sont normales aux droites*

$$ax\cos\varphi + by\sin\varphi = c^2\cos\varphi\sin\varphi.$$

où φ désigne un paramètre variable et où a, b, c sont des longueurs constantes.

Chercher si, parmi ces courbes, il y a des coniques. Examiner plus particulièrement le cas de $a = b$.

II. *Intégrer l'équation*

$$\frac{d^4 x}{dt^4} + 2\,\frac{d^2 x}{dt^2} + x = t \cos t.$$

I. On voit immédiatement, *si l'on suppose*

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

que les droites proposées sont les normales à l'ellipse

$$x = a \sin\varphi, \qquad y = b \cos\varphi.$$

D'après cela, considérons l'ellipse

$$x = \text{A} \sin\varphi, \qquad y = -\text{B} \cos\varphi;$$

ses normales, qui sont représentées par l'équation

$$\text{A}x \cos\varphi + \text{B}y \sin\varphi = (\text{A}^2 - \text{B}^2) \cos\varphi \sin\varphi,$$

deviendront identiques aux droites proposées, si l'on fait

$$\text{A} = a\,\frac{c^2}{a^2 - b^2}, \qquad \text{B} = b\,\frac{c^2}{a^2 - b^2}.$$

En conséquence, si la différence $a^2 - b^2$ n'est pas nulle, les droites données sont les normales à l'ellipse que nous venons de définir, et les trajectoires demandées sont les *courbes parallèles* à cette ellipse. Une seule d'entre elles est une conique; c'est l'ellipse elle-même.

Si l'on suppose maintenant

$$a^2 - b^2 = 0,$$

les droites proposées ont pour enveloppe la courbe

$$x = \frac{c^2}{a} \sin^3\varphi, \qquad y = \frac{c^2}{a} \cos^3\varphi,$$

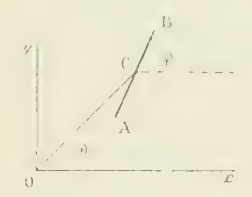
qui est l'hypocycloïde à quatre rebroussements : les trajectoires cherchées sont les développantes de cette courbe.

II. L'équation proposée a pour intégrale générale

$$x = (A + A_1 t)\cos t + (B + B_1 t)\sin t - \frac{t^2}{8}\sin t - \frac{t^3}{24}\cos t,$$

A, A_1, B, B_1 étant quatre constantes arbitraires.

Mécanique. — *Sur un plan horizontal parfaitement poli* xOy *est placée une barre homogène* AB, *de masse* M *et de longueur* $2a$. *Le milieu* C *de cette barre est attaché à un point fixe* O *du plan par un fil*



élastique OC *dont on néglige la masse et dont la longueur à l'état naturel est* a. *Le point* C *étant écarté de* O *de façon à tendre le fil et à lui donner une longueur* r_0 *supérieure à* a, *on lance la barre sur le plan.*

Trouver le mouvement.

A un instant quelconque t, *on appellera* r *et* θ *les coordonnées polaires du point* C *et* φ *l'angle de la barre avec* Ox.

On admettra que la tension du fil élastique OC, *quand sa longueur est* r, *est proportionnelle à son allongement* $r - \alpha$ *et, par suite, que l'intensité de cette tension est* $M\lambda^2(r-\alpha)$, λ^2 *désignant une constante.*

Cinématique. — *Quelle courbe faut-il faire rouler sans glisser sur une ligne droite pour que deux*

points A, B *liés à cette courbe possèdent constamment des vitesses dont le rapport soit un nombre constant m?*

Quelles courbes décrivent alors les points A *et* B? *Y a-t-il d'autres couples de points jouissant de la même propriété?*

Astronomie. — *Quelle est, en temps vrai et en temps moyen, l'heure du coucher géométrique du centre du Soleil à Paris, le jour du solstice d'été?*

Latitude de Paris	48° 50′ 11″
Déclinaison du Soleil	+23 27 18,7

Temps moyen à midi vrai :

Le jour du solstice	$0^h\,1^m\,27^s,21$
Le lendemain	$0^h\,1^m\,40^s,33$

Poitiers.

Analyse. — *Une surface* S *est rapportée à trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz. *Dans le plan des* xy, *un élément superficiel infiniment petit du second ordre est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à* Oz. *Le volume compris dans ce cylindre, entre le plan des* xy *et la surface* S, *se trouve être égal au produit d'une constante donnée a par l'aire interceptée sur la surface* S.

Écrire l'équation aux dérivées partielles (E) *à laquelle satisfait la surface* S. *Trouver une intégrale complète de l'équation* (E).

Démontrer que l'équation (E) *a des solutions communes avec l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution autour de* Oz, *et déterminer une solution commune, telle que pour*

$$z = a$$

on ait

$$x^2 + y^2 = b^2.$$

Mécanique. — *Une droite matérielle homogène* AB, *de longueur* $2a$, *de densité* 1, *mobile sans frottement, sur un plan horizontal, est articulée en* B, *avec une tige sans masse* OB, *de longueur* a, *animée d'un mouvement uniforme de rotation autour du point* O, *dans le même plan. Tous les points de* AB *sont repoussés de* O, *proportionnellement à leurs distances à ce point et à leurs masses. Étudier le mouvement de* AB.

Astronomie. — *Ayant les éléments d'une éclipse de Lune, calculer les heures des principaux contacts et la grandeur de l'éclipse.* (*Les données se rapportent à l'éclipse du* 12 *juillet* 1870.)

EXERCICES PRÉPARATOIRES A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION.

FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY.

Licence ès Sciences mathématiques.

I. Étant donnée l'intégrale double

$$z = \int\int \sin x^2 y^3 \, dx \, dy$$

étendue à l'aire limitée par

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad y = 1, \qquad xy = a, \qquad xy - x + mb = 0,$$

où a, b, m désignent des nombres positifs, effectuer le

changement de variable

$$x = u - mv,$$

$$y = \frac{u}{u + mv};$$

démontrer que z a une limite si, b restant fixe, a croît indéfiniment.

II. Étant donnés deux axes rectangulaires Ox et Oy, on considère une aire A et l'intégrale curviligne

$$\int P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

prise suivant le contour dans le sens positif; déterminer les fonctions P et Q de façon que cette intégrale représente le moment d'inertie par rapport à l'origine de l'aire A supposée homogène.

Agrégation des Sciences mathématiques.

Analyse. — I. On considère la courbe C enveloppe de la droite

$$3(y - tx)(3t^2 - 1) + t^3 = 0,$$

où t représente un paramètre variable.

1° Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points de la courbe soient sur une droite, huit points sur une conique, douze points sur une cubique, ces lignes ne passant par aucun point singulier de la courbe C.

2° Déterminer les points d'inflexion, les tangentes doubles, les coniques tangentes à la courbe en quatre points, les cubiques ayant en trois points donnés un contact du troisième ordre, ou en quatre points donnés un contact du second ordre.

II. On considère la biquadratique gauche définie par les deux équations

$$4x^2 + z^2 - 4xy - 4 = 0,$$
$$6y^2 - yz - 2zx + 2x + 13y = 0.$$

1° Exprimer les coordonnées x, y, z d'un quelconque de ses points en fonction d'un paramètre t.

2° Trouver, à l'aide du théorème d'Abel, la condition pour que quatre points de la courbe soient dans un même plan, pour que huit points soient sur une même quadrique ne contenant pas la courbe, en général, pour que $4n$ points soient sur une même surface de degré n.

3° Démontrer que les plans osculateurs en quatre points, situés dans un même plan, coupent la courbe en quatre autres points également dans un même plan.

4° Trouver les points stationnaires; montrer qu'ils sont quatre à quatre dans un même plan.

5° Par une corde de la biquadratique on mène des plans tangents à la courbe, trouver leurs points de contact; montrer que le rapport anharmonique de ces plans tangents reste constant quand on fait varier la corde.

6° On considère une quadrique passant par la courbe; trouver la relation qui existe entre les deux points où chaque génératrice d'un même système de la quadrique rencontre la courbe.

Spéciales. — I. On considère un triangle ABC et les coniques S inscrites dans ce triangle; soient A′, B′, C′ les points de contact de ces coniques avec les côtés du triangle, et P le point de rencontre de AA′, BB′ et CC′.

1° Enveloppe des coniques S quand le point P est à l'infini.

2° Lieu du point P lorsque les coniques S restent

tangentes à une droite D; nature de ce lieu suivant la position de la droite D.

3° Par un point M du plan passent deux coniques S, tangentes à D; si la droite joignant les points P relatifs à ces deux coniques est assujettie à passer par un point fixe Q, le lieu de M est une conique conjuguée par rapport à un triangle fixe indépendant de la position de Q.

4° Par un point M du plan passent deux paraboles inscrites dans le triangle ABC; si elles sont assujetties à se couper orthogonalement au point M, déterminer le lieu de ce point, l'enveloppe des tangentes avec deux courbes en ce point, et l'enveloppe de la droite joignant les points P correspondants.

II. On donne un ellipsoïde et un point M; on considère les droites D telles que chacune d'elles soit perpendiculaire au plan passant par sa conjuguée, par rapport à l'ellipsoïde et par le point M.

1° Démontrer que par un point quelconque de l'espace passent trois droites D: pour quelles positions du point deux ou trois de ces droites sont-elles confondues? Peuvent-elles former un trièdre trirectangle?

2° Dans un plan P existe, en général, une seule droite D; quels sont les plans renfermant une infinité de ces droites, et quelle est l'enveloppe de ces droites dans chacun d'eux?

3° On suppose que le plan P se déplace parallèlement à lui-même; former la surface engendrée par les droites D situées dans les positions successives de ce plan.

4° Pour quelles directions du plan P, ou bien pour quelles positions du point M cette surface est-elle réductible à une courbe plane, et quelle est cette courbe?

Élémentaires. — On donne une sphère de centre O

un plan P et un point S; on considère tous les cercles C de la sphère non parallèles au plan P, et projetés de S sur ce plan suivant des cercles.

1° Démontrer que les plans des cercles C se coupent suivant une même droite D.

2° Inversement, étant donnée une droite D, et le plan P restant arbitraire, il existe une infinité de points S tels que, pour chacun d'eux, la droite D satisfasse aux conditions énoncées précédemment, le plan P étant convenablement choisi. Trouver l'ensemble de ces points S lorsque la droite D est fixe, puis lorsqu'elle varie en passant par un point fixe.

3° Le plan P et le point S restant fixes, il existe sur la sphère un faisceau de cercles C_1 orthogonaux à tous les cercles C; lieu des sommets des cônes passant par un cercle particulier C_1 et par les cercles C successifs.

4° A chaque cercle C_1 correspondent des cercles C tels que l'un des deux cônes, passant par C et C_1, devienne un cylindre; trouver, lorsque C_1 varie, le lieu des parallèles aux génératrices de tous les cylindres ainsi formés, menées par un point de l'espace.

5° On suppose que le plan P reste fixe et que le point S décrive une droite Δ; trouver l'ensemble des droites D correspondantes; examiner le cas particulier où la droite Δ est parallèle ou perpendiculaire au plan P

BIBLIOGRAPHIE.

Les Femmes dans la Science, notes recueillies par *A. Rebière*. 2e édition, 1 vol. in-8°, 360 pages. Paris, Nony et Cie, 1897.

Le 24 février 1894, M. Rebière fit au cercle Saint-Simon une

conférence, fort goûtée, sur *les femmes dans la Science.* C'est cette conférence, d'abord imprimée en une Brochure de 87 pages, que l'auteur a développée, depuis, jusqu'à en faire un fort Volume de 360 pages.

Le titre même de l'Ouvrage indique, à lui seul, très nettement, le but poursuivi et, disons-le de suite, très heureusement atteint. C'est un ensemble de notes impartiales non pas seulement sur les femmes qui se sont occupées *directement* de la Science, mais sur toutes celles qui, de près ou de loin, ont eu quelque heureuse influence sur elle. Les 285 premières pages du Volume forment ainsi une sorte de Dictionnaire où, rangées par ordre alphabétique, se trouvent des Notices, tantôt très brèves, tantôt plus développées, sur toutes les bienfaitrices de la Science, au sens large du mot. A côté des Notices de Marie Agnesi, de Sophie Germain, de Sophie Kowalewski, ces trois célèbres mathématiciennes, on rencontre des noms comme ceux de Mme Höené Wronski, de Mme Yvon-Villarceau, de Mme Lavoisier et de Mme Laplace, simples collaboratrices ou éditrices des Œuvres d'un illustre mari. Celles qui, comme Mme Pasteur, ont su par leur affection constante soutenir leur époux dans les luttes pour la Science ou même celles qui, comme Cherestrata (mère d'Epicure), ont eu l'honneur de donner le jour à un homme célèbre, ne sont pas non plus oubliées. Chaque Notice est suivie d'un index bibliographique très documenté; quelques-unes sont accompagnées d'un portait ou d'un fac-similé d'autographe.

Cette petite Encyclopédie féminine est suivie d'une première Note intitulée : *Si la femme est capable de Science.* C'est là certes un sujet passionnant, tout d'actualité, mais dans lequel malheureusement on ne peut faire que des assertions bien hasardées puisque toutes résultent plus ou moins de la comparaison de la femme à l'homme, comparaison bien peu légitime puisque, de tout temps, l'éducation de la femme a été bien distincte de celle de l'homme. M. Rebière, restant dans le rôle d'éditeur impartial qu'il s'est assigné, se contente de reproduire fidèlement les opinions diverses qu'il a patiemment recueillies; et il y a un certain piquant à pouvoir rapprocher ainsi les observations de Bossuet et de Voltaire, celles de Mgr Dupanloup et de Mme Séverine, sur le même sujet.

L'Ouvrage se termine, enfin, par une seconde Note : *Menus propos sur les femmes et les Sciences,* qui contient des

détails biographiques, des opinions, des anecdotes, des paradoxes même qui y jettent une note gaie.

Je regrette de ne pouvoir, dans un aussi bref compte rendu, ne donner qu'une idée bien imparfaite de tous les détails intéressants que contient ce joli Volume et je souhaite vivement que ces quelques mots d'éloge lui attirent de nombreux lecteurs.

C. Bourlet.

QUESTIONS.

1769. Par le foyer d'une conique donnée on mène des cordes; les circonférences de cercles, qui ont ces cordes pour diamètres, sont tangentes à deux cercles. (Mannheim.)

1770. Soient

$$l x^2 + m y^2 + n z^2 + p w^2 = 0$$

l'équation d'une surface du second ordre conjuguée au tétraèdre de référence; a, b, c, d, e, f les arêtes de ce tétraèdre, A, B, C et D les aires de ses faces, et V son volume; α, β, γ les demi-axes de la surface; on a

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = -36\,\frac{l^3 m^3 n^3 p^3 A^2 B^2 C^2 D^2 V^2}{(mnp\,A^2 + npl\,B^2 + plm\,C^2 + lmn\,D^2)^4},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -lmnp\,\frac{\left\{\begin{array}{l}(mn\,A^2D^2a^2 + nl\,B^2D^2b^2 + lm\,C^2D^2c^2 \\ \quad + lp\,B^2C^2d^2 + mp\,C^2A^2e^2 + np\,A^2B^2f^2)\end{array}\right\}}{(mnp\,A^2 + npl\,B^2 + plm\,C^2 + lmn\,D^2)^2},$$

$$\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 = \frac{l^2 m^2 n^2 p^2 (l + m + n + p) A^2 B^2 C^2 D^2}{(mnp\,A^2 + npl\,B^2 + plm\,C^2 + lmn\,D^2)^3}.$$

La condition pour que la surface représente un paraboloïde est donc $mnp\,A^2 + npl\,B^2 + plm\,C^2 + lmn\,D^2 = 0$.

(Genty.)

CONGRÈS DE ZURICH.

Au moment où nous mettons ce numéro sous presse, le Comité nous prie de faire savoir aux mathématiciens désireux d'assister au Congrès qu'ils pourront s'y rendre, quand même ils n'auraient pas reçu d'invitations personnelles. Des omissions involontaires et inévitables ont dû, en effet, se produire. Mais pour l'organisation matérielle, il est désirable que chacun fasse connaître ses intentions aussitôt que possible.

Le programme du Congrès va être prochainement publié. Nous savons qu'il comprendra :

Le lundi 9 août, une conférence de M. POINCARÉ : *Sur les rapports de l'Analyse et de la Physique mathématique;* une conférence de M. HURWITZ : *Sur les progrès récents de la théorie des fonctions analytiques;*

Le mercredi 11 août, une conférence de M. F. KLEIN : *Sur l'enseignement des Mathématiques supérieures.*

Des séances particulières ou plénières, des excursions et un banquet compléteront le programme et fourniront aux mathématiciens présents l'occasion de se voir, d'échanger leurs vues et leurs idées, de se grouper suivant leurs goûts et leurs affinités.

Il semble dès à présent convenu que le prochain Congrès international aura lieu à Paris, en 1900.

ERRATA.

T. XV, 1896, page 372, ligne 13, *au lieu de* ABEL, TRANSON, *lisez* ABEL TRANSON.

T. XVI, 1897,

Pages.	Lignes.	Au lieu de	Lisez
200	2 en remontant	crois	croirais
201	10	dans les parties	dans les plus petites parties.
214	Le Tableau forme la suite de la note de la page 213		
216	7 en remontant	que	si
218	4	près de désirer de voir	près de voir
231	10	*présentation*	exposition

[P1b]

SUR LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES FIGURES PLANES;

Par M. Georges BROCARD,
Professeur au lycée du Havre (1).

1. Considérons, dans la figure primitive, un triangle CAB et effectuons une transformation homographique telle que les points cycliques deviennent réels tout en restant à l'infini; soient, dans la transformée, ci et cj les droites joignant le point c à ces deux points à l'infini et c', c'' les points où elles rencontrent le côté ab, et soit enfin c''_1 le symétrique de c'' par rapport au milieu d de ab. On sait que le rapport anharmonique $(c'c''_1\,ab)$ est égal à $\frac{\mathrm{CA}^2}{\mathrm{CB}^2}$. Il en résulte que l'on a

$$\frac{c'a}{c'b} \times \frac{c''_1 b}{c''_1 a} = \frac{\mathrm{CA}^2}{\mathrm{CB}^2}$$

ou encore

$$\frac{c'a_1 . ac''}{c'b_1 . bc''} = \frac{\mathrm{CA}^2}{\mathrm{CB}^2} = \frac{ac'_1 . ac''}{bc'_1 . bc}.$$

Si donc on a, dans la figure primitive, une relation homogène entre CA et CB, elle se transformera en une autre relation que l'on obtiendra en remplaçant, dans la première, CA^2 par le produit des projections de ac sur ab faites successivement suivant des parallèles à ci et cj, et CB^2 par une expression analogue.

On peut remarquer que, si l'on a CA = CB, il en ré-

(1) *Voir* t. XV, p. 426.

sultera que les points c' et c'' seront symétriques par rapport à d.

Plus généralement, soit xy une droite quelconque, et

Fig. 1.

a_1, a_2, b_1, b_2 les points de rencontre de cette droite avec les parallèles à ci et cj, menées par a et b. On a évidemment

$$\frac{ac'}{bc'} = \frac{a_1 c}{b_1 c}, \qquad \frac{ac''}{bc''} = \frac{a_2 c}{b_2 c};$$

d'où

$$\frac{ac' . ac''}{bc' . bc''} = \frac{ca_1 . ca_2}{cb_1 . cb_2}.$$

On peut donc, dans la relation donnée, remplacer CA^2 par le produit des projections de ca sur une droite quelconque, faites successivement suivant des parallèles à ci et cj, et CB^2 par une expression analogue.

Enfin, on a aussi

$$\frac{ca_1}{cb_1} = \frac{cf}{ch}, \qquad \frac{ca_2}{cb_2} = \frac{ce}{cg};$$

d'où

$$\frac{ca_1 . ca_2}{cb_1 . cb_2} = \frac{ce . cf}{ch . cg}.$$

On peut donc encore remplacer CA^2 par le produit des

projections de ca sur ci et cj, et CB^2 par une expression analogue.

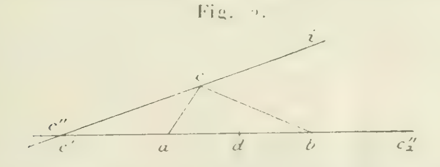
Ces considérations permettent de déduire très simplement, de toute relation métrique relative à une circonférence, une relation analogue relative à l'hyperbole. Supposons, par exemple, que, dans la figure primitive, AB soit un diamètre d'une circonférence passant par C. Dans la transformée, ab sera un diamètre d'une hyperbole passant par c, et la relation $CA^2 + CB^2 = AB^2$ donnera le théorème suivant :

Le produit des projections de ac sur ab, faites parallèlement aux deux asymptotes, augmenté du produit des projections de bc, est égal à ab^2.

2. Supposons maintenant que, dans la transformée, les deux points cycliques soient transformés en deux points à l'infini réels et confondus.

Soient ci la droite qui joint le point c à ces deux points

Fig. 2.



confondus; c', c'' les deux points confondus où elle rencontre ab, et c''_1 le symétrique de c'' par rapport au milieu d de ab. La relation $(c'c''_1ab) = \frac{CA^2}{CB^2}$ devient

$$\frac{c'a}{c'b} \times \frac{c''_1 b}{c''_1 a} = \left(\frac{ac'}{bc'}\right)^2 = \frac{CA^2}{CB^2}.$$

Il suffira donc, pour transformer une relation homogène entre CA et CB, de les remplacer par leurs projections sur ab (ou sur une droite quelconque), faites parallèlement à ci.

Il est facile de déduire de cette façon, de toute propriété métrique de la circonférence, une propriété analogue de la parabole.

Exemple. — Étant données deux paraboles homothétiques, si par le centre d'homothétie on mène une sécante quelconque, et que l'on projette sur une tangente commune, parallèlement à la direction des axes, les segments compris entre le centre d'homothétie et deux points antihomologues situés sur cette sécante, le produit des deux projections obtenues est constant.

On peut obtenir un théorème analogue relatif à deux hyperboles homothétiques ; seulement, l'un des segments devra être projeté suivant une parallèle à l'une des asymptotes, et l'autre, suivant une parallèle à l'autre asymptote.

Remarque. — Le produit des projections d'une longueur sur les deux asymptotes, faites suivant des parallèles à ces asymptotes, représente, à un facteur constant près, l'aire du parallélogramme ayant cette longueur pour diagonale et ses côtés respectivement parallèles aux deux asymptotes, cette aire étant affectée d'un signe convenable.

Toute relation homogène entre les longueurs de certaines lignes droites de la première figure peut donc être transformée en une relation analogue entre les aires des parallélogrammes ayant pour diagonales les lignes droites correspondantes de la deuxième figure, et leurs côtés parallèles aux deux asymptotes de l'hyperbole.

Exemples. — Les parallélogrammes construits sur deux tangentes issues d'un même point sont équivalents.

Soient a, b les extrémités d'un diamètre d'une hyperbole, et C un point quelconque de cette courbe : la

somme algébrique des aires des parallélogrammes construits sur *ca* et *cb* comme diagonales est constante.

[C21]

SUR UNE FORMULE DE LA THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES ET DE L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES [1].

PAR M. E. JAGGI,

Licencié ès sciences mathématiques.

La formule que nous nous proposons de démontrer pour les fonctions de plusieurs variables est l'analogue de la formule

$$(1)\quad \begin{cases} F(x) = F(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dF(x)}{dx}\,dx \\ \quad = F(x_0) + \dfrac{x-x_0}{1}\dfrac{dF(x_0)}{dx_0} + \dfrac{(x-x_0)^2}{1.2}\dfrac{d^2F(x_0)}{dx_0^2} + \ldots \\ \quad + \dfrac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\dfrac{d^{n-1}F(x_0)}{dx_0^{n-1}} + \displaystyle\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}\frac{d^nF(x)}{dx^n}\,dx^n \end{cases}$$

du cas d'une seule variable.

On ne sait actuellement mettre les fonctions de plusieurs variables que sous forme d'intégrales multiples qui ne portent pas sur leurs propres dérivées, et sous forme d'intégrales de différentielles totales, pour lesquelles on ne possède pas de procédé méthodique d'intégration.

Une formule, remplaçant l'intégrale de différentielle totale, ne contenant que des intégrales simples ou mul-

---

[1] Extrait d'un Mémoire sur la *Théorie générale des fonctions*, présenté par l'auteur à l'Académie des Sciences, en [illegible].

tiples ordinaires, permettra d'étendre aux fonctions de plusieurs variables les théorèmes que la forme (1) a permis de démontrer pour les fonctions d'une seule variable.

Soit d'abord une fonction de deux variables que nous supposerons sans points critiques; nous écrirons

$$\begin{aligned} F(x,y) = {} & F(x_0,y_0) \\ & + F(x,y_0) - F(x_0,y_0) \\ & + F(x_0,y) - F(x_0,y_0) \\ & + F(x,y) - F(x,y_0) - [F(x_0,y) - F(x_0,y_0)]. \end{aligned}$$

Nous avons, en vertu de la formule (1),

$$F(x,y_0) - F(x_0,y_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F(x,y_0)}{\partial x}\,dx,$$

$$F(x_0,y) - F(x_0,y_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial F(x_0,y)}{\partial y}\,dy,$$

$$F(x,y) - F(x,y_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dy,$$

$$F(x_0,y) - F(x_0,y_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial F(x_0,y)}{\partial y}\,dy,$$

$$\begin{aligned} F(x,y) & - F(x,y_0) - [F(x_0,y) - F(x_0,y_0)] \\ & = \int_{y_0}^{y} \left[\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial F(x_0,y)}{\partial y}\right] dy \\ & = \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} F(x,y) = {} & F(x_0,y_0) \\ & + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F(x,y_0)}{\partial x}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial F(x_0,y)}{\partial y}\,dy \\ & + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy. \end{aligned} \right.$$

Pour une fonction de trois variables $F(x,y,z)$, on

trouvera de même, au moyen des formules (1) et (2),

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&F(x, y, z) \\
&\quad = F(x_0, y_0, z_0) \\
&\qquad + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F(x, y_0, z_0)}{\partial x}\, dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial F(x_0, y, z_0)}{\partial y}\, dy \\
&\qquad + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial F(x_0, y_0, z)}{\partial z}\, dz + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 F(x, y, z_0)}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy \\
&\qquad + \int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} \frac{\partial^2 F(x_0, y, z)}{\partial y\, \partial z}\, dy\, dz + \int_{z_0}^{z}\int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 F(x, y_0, z)}{\partial x\, \partial z}\, dx\, dz \\
&\qquad + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} \frac{\partial^3 F(x, y, z)}{\partial x\, \partial y\, \partial z}\, dx\, dy\, dz.
\end{aligned}
\right.
$$

En général, pour une fonction de n variables, on aura, en appelant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ces n variables et α_1, $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ leurs valeurs initiales,

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\quad = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \\
&\qquad + \sum \int_{\alpha_1}^{x_1} \frac{\partial F(x_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_1}\, dx_1 \\
&\qquad + \sum \int_{\alpha_1}^{x_1}\int_{\alpha_2}^{x_2} \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_1\, \partial x_2}\, dx_1\, dx_2 \\
&\qquad + \sum \int_{\alpha_1}^{x_1}\int_{\alpha_2}^{x_2}\int_{\alpha_3}^{x_3} \frac{\partial^3 F(x_1, x_2, x_3, \alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_1\, \partial x_2\, \partial x_3}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 + \ldots \\
&\qquad + \sum \int_{\alpha_1}^{x_1}\int_{\alpha_2}^{x_2} \cdots \int_{\alpha_{n-1}}^{x_{n-1}} \frac{\partial^{n-1} F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \alpha_n)}{\partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}} \\
&\qquad\qquad \times dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1} \\
&\qquad + \sum \int_{\alpha_1}^{x_1}\int_{\alpha_2}^{x_2} \cdots \int_{\alpha_{n-1}}^{x_{n-1}}\int_{\alpha_n}^{x_n} \frac{\partial^{n} F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)}{\partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}\, \partial x_n} \\
&\qquad\qquad \times dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}\, dx_n.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans cette formule, le premier terme est, comme dans la formule (1), la valeur initiale de la fonction; le second terme est la somme des intégrales des n dérivées premières prises par rapport aux n variables respectivement, les variables qui ne varient pas dans ces inté-

grales ayant leurs valeurs initiales; le troisième terme est la somme des $\frac{n(n-1)}{1.2}$ intégrales doubles portant sur les $\frac{n(n-1)}{1.2}$ dérivées rectangles, où les variables par rapport auxquelles on intègre varient seules et où les autres variables ont leurs valeurs initiales.

D'une manière générale, cette formule se compose de la valeur initiale de la fonction et des intégrales p^{uples} des dérivées d'ordre p de F ($p = 1, 2, \ldots, n$), chaque dérivation n'étant faite qu'une fois par rapport à la même variable, l'intégration étant faite par rapport aux variables de dérivation et les autres variables ayant leurs valeurs initiales.

Une application immédiate de cette formule est l'intégration méthodique des différentielles totales.

La différentielle totale d'ordre un

$$dF = \sum_p \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_p} d_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

s'intègre immédiatement par la formule, car ayant les n dérivées partielles premières, qui sont données dans dF, on obtient les autres dérivées qui entrent dans la formule (4) par des dérivations successives des premières. L'intégrale de dF ne contient qu'une arbitraire, $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Supposons qu'il s'agisse d'intégrer la différentielle totale seconde

$$d^2 F = \sum \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_p^2} dx_p^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_p \partial x_q} dx_p dx_q.$$

On ne connaît pas alors les dérivées premières, mais

seulement les dérivées secondes ; il est vrai qu'on peut trouver les dérivées premières ; mais nous allons transformer la formule (4) de manière qu'il ne soit pas nécessaire de les chercher.

Prenons d'abord le cas de deux variables :

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F(x,y_0)}{\partial x}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial F(x_0,y)}{\partial y}\,dy + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy.$$

La formule (1) donne

$$\frac{\partial F(x,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x_0} + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 F(x,y_0)}{\partial x^2}\,dx,$$

$$\frac{\partial F(x_0,y)}{\partial y} = \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y_0} + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 F(x_0,y)}{\partial y^2}\,dy,$$

et, par conséquent,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} F(x,y) &= F(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x_0} + (y-y_0)\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y_0} \\ &+ \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 F(x,y_0)}{\partial x^2}\,dx^2 \\ &+ \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \int_{y_0}^{y}\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 F(x_0,y)}{\partial y^2}\,dy^2. \end{aligned}\right.$$

Cette formule donne une intégration méthodique de la différentielle seconde d^2F, c'est-à-dire permet de trouver la fonction F lorsqu'on connaît ses trois dérivées secondes.

On voit qu'il y a trois constantes d'intégration

$$F(x_0,y_0),\quad \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x_0},\quad \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y_0}.$$

Dans le cas d'une fonction de n variables

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

dont on donne la différentielle totale seconde, c'est-à-dire toutes les dérivées d'ordre deux, on remplacera de même dans la formule (4) les n dérivées premières par leurs valeurs obtenues en fonction des dérivées secondes au moyen de la formule (1) :

$$\frac{\partial F(x_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_1} = \frac{\partial F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{x_1} \frac{\partial^2 F(x_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_1^2}\, dx_1.$$

On aura ainsi une formule donnant $F(x_1, \ldots, x_n)$ au moyen des $\frac{n(n+1)}{1.2}$ dérivées données et de dérivées qu'on obtient par dérivations successives des dérivées rectangles données. Les constantes arbitraires dans l'intégration indéfinie sont les valeurs initiales de la fonction et de ses n dérivées premières; leur nombre est donc $n+1$.

Supposons maintenant qu'on donne une différentielle totale d'ordre trois, c'est-à-dire toutes les dérivées d'ordre trois d'une fonction

$$d^3 F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum \frac{\partial^3 F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^3}\, dx_1^3 + 3 \sum \frac{\partial^3 F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^2\, \partial x_2}\, dx_1^2\, dx_2 + 6 \sum \frac{\partial^3 F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1\, \partial x_2\, \partial x_3}\, dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

Nous remplacerons la formule (4) par une formule ne contenant plus que les dérivées d'ordre trois données et des dérivées d'ordre supérieur que l'on tire des dérivées données par dérivations successives : nous écrirons,

au moyen de la formule (1),

$$\frac{\partial F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, x_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_p}$$

$$= \frac{\partial F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_p} + \frac{x - x_1}{1} \frac{\partial^2 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, x_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n)}{\partial^2 \alpha_p}$$

$$+ \int_{\alpha_p}^{x_p} \int_{\alpha_p}^{x_p} \frac{\partial^3 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, x_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n)}{\partial^3 x_p} dx_p^2$$

et, au moyen de la formule (2),

$$\frac{\partial^2 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, x_p, \alpha_{+1}, \ldots, \alpha_{q-1}, x_q, \alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_n}{\partial x_p \partial x_q}$$

$$= \frac{\partial^2 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_q, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_p \partial \alpha_q}$$

$$+ \int_{\alpha_p}^{x_p} \frac{\partial^3 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, x_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_q, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_p^2 \partial \alpha_q} dx_p$$

$$+ \int_{\alpha_q}^{x_q} \frac{\partial^3 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_{q-1}, x_q, \alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_p \partial \alpha_p^2} dx_q$$

$$+ \int_{\alpha_p}^{x_p} \int_{\alpha_q}^{x_q} \frac{\partial^4 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, x_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{q-1}, x_q, \alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_p^2 \partial x_q^2} dx_p dx_q$$

$$(p, q = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Remplaçant, dans la formule (4), les dérivées premières et secondes par ces valeurs (¹), on n'aura plus que des intégrales multiples portant sur les dérivées

---

(¹) On pourrait écrire aussi :

$$\frac{\partial^2 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, x_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{q-1}, x_q, \alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_p \partial x_q}$$

$$= \frac{\partial^2 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_q, \alpha_n)}{\partial \alpha \partial \alpha_q}$$

$$+ \int_{\alpha_p}^{x_p} \frac{\partial^3 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, x, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_q, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_p^2 \partial \alpha_q} dx$$

$$+ \int_{\alpha_q}^{x_q} \frac{\partial^3 F(\alpha_1, \ldots, x_p, \ldots, \alpha_{q-1}, x_q, \alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_n)}{\partial x_p \partial x_q^2} dx,$$

ce qui diminue le nombre des intégrations à faire

troisièmes données et des dérivées d'ordre supérieur.

Les autres termes sont :

$$
\begin{aligned}
&F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + \sum_p \frac{x_p - \alpha_p}{1}\, \partial F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p) \\
&\quad + \frac{1}{1 \cdot 2}\left[\sum_p (x_p - \alpha_p)^2 \frac{\partial^2 F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)}{\partial \alpha_p^2} \right. \\
&\qquad \left. + 2 \sum_{p,q} (x_p - \alpha_p)(x_q - \alpha_q) \frac{\partial^2 F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_p \partial \alpha_q} \right] \\
&\qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n, p \neq q).
\end{aligned}
$$

Il y a donc $\left[1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\right]$ constantes arbitraires dans l'intégrale indéfinie de la différentielle totale du troisième ordre d'une fonction de n variables ; ce sont les valeurs initiales de la fonction, de ses n dérivées premières et de ses $\frac{n(n-1)}{2}$ dérivées secondes.

Par l'exemple précédent, on voit que, pour intégrer une différentielle totale d'ordre m quelconque, on aura à remplacer dans la formule (4) les dérivées d'ordre inférieur à m par leurs valeurs calculées de proche en proche et exprimées au moyen des dérivées d'ordre supérieur ou égal à m. L'intégration de la différentielle reviendra alors à effectuer les intégrales de la formule obtenue, intégrales d'ordre m ou d'ordre supérieur, portant sur les dérivées d'ordre m et d'ordres supérieurs.

Les constantes arbitraires de l'intégrale indéfinie sont les valeurs initiales de la fonction et de ses dérivées d'ordres 1, 2, ..., $m - 1$. En désignant par D_n^p le nombre des combinaisons avec répétition de n objets p à p, le nombre des arbitraires sera

$$
1 + D_n^1 + D_n^2 + \ldots + D_n^{m-1}.
$$

La formule (4) que nous avons démontrée, en sup-

posant que la formule (1) était applicable à la fonction et à ses dérivées lorsqu'une seule variable varie, est vraie dans tous les cas, c'est-à-dire lorsque les variables sont réelles ou imaginaires et lorsque la fonction a ou n'a pas de points critiques ; la supposition que nous avons faite peut alors, en effet, être faite également, sauf certaines restrictions sur le chemin suivi par chaque variable, qui demandent une étude approfondie des valeurs des variables qui forment des systèmes *critiques* pour la fonction.

Si l'on énonce le théorème de Cauchy sous cette forme, qui donne des démonstrations fort simples de théorèmes importants (tels que la décomposition d'une fonction en facteurs primaires en considérant le logarithme de cette fonction), en l'appliquant non seulement aux pôles de la dérivée, mais à tous les points critiques de la fonction :

L'intégrale de la fonction $\frac{dF(x)}{dx}$, *prise le long d'un contour fermé renfermant un seul point critique et ne passant par aucun point critique de* F(x), *donne, au retour de la variable au point x de départ, la différence au point x des valeurs de deux des fonctions en lesquelles se décompose* F(x), *différence qui est nulle au point critique considéré.*

Ce théorème, qui est une conséquence de l'identité

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{dF(x)}{dx}\,dx,$$

sous certaines conditions de continuité de variation de la variable et de la fonction, peut être étendu, par le moyen de notre formule, aux fonctions de plusieurs variables; car notre formule fournit une intégration méthodique de la différentielle totale et donne, par con-

séquent, le moyen de calculer la différence

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) - F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

et, par suite, la différence des valeurs au même point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de deux des fonctions en lesquelles se décompose la fonction F.

C'est sous ce seul point de vue, croyons-nous, que le théorème de Cauchy peut être étendu aux fonctions de plusieurs variables et donner pour celles-ci les nombreuses applications qu'on en a faites dans le cas d'une seule variable, telles que, par exemple, la décomposition d'une fonction en un produit de facteurs primaires.

Nous nous contentons d'indiquer dans cette Note cette application de notre formule, et cette interprétation du théorème de Cauchy, car leur démonstration exige, au préalable, une étude approfondie des systèmes critiques des fonctions de plusieurs variables.

D'une manière générale, notre formule est destinée à prendre, dans la théorie des fonctions de plusieurs variables, la place que prend la formule

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{dF(x)}{dx}\,dx$$

dans la théorie des fonctions d'une seule variable.

[H11d] [J4a]

SUR LA CONVERGENCE DES SUBSTITUTIONS UNIFORMES;

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

On sait que si f désigne une fonction holomorphe ou méromorphe, la substitution

$$x \mid fx$$

répétée indéfiniment fournit une suite de fonctions fx, f^2x, ..., qui, pour une valeur donnée de x, prennent des valeurs pouvant présenter trois cas :

1° Elles croissent ou décroissent sans limite.

2° Elles tendent vers n limites distinctes qui sont racines de l'équation

$$f^n x - x = 0.$$

et l'on sait qu'à partir d'un nombre suffisant d'itérations, la période de convergence est n, c'est-à-dire que les indices d'itération des fonctions qui tendent vers une des n limites suivent une progression arithmétique dont la raison est n.

3° Ou enfin elles tendent vers une seule limite qui est racine de

$$fx - x = 0; \tag{1}$$

c'est le cas précédent où les n limites sont égales. La convergence peut alors avoir pour période soit un nombre entier m, soit l'unité. Soit a un point-racine de l'équation (1); on sait que si l'on a [1]

$$\operatorname{mod}\left(\frac{dfx}{dx}\right)a < 1,$$

il existe autour du point a un domaine dans lequel, x étant pris, il y aura convergence. Je me propose d'étudier le cas où ce module est égal à l'unité; je suppose que la valeur $x = a$ n'a d'autre particularité que d'annuler la fonction $fx - x$ et quelques-unes de ses dérivées. Avant d'étudier le cas d'une seule limite, il faut faire quelques remarques sur le cas de n limites. L'équa-

---

(1) Kœnigs, *Sur certaines équations fonctionnelles* (*Annales de l'École Normale*, 1884; *Supplément*)

tion

$$f^n x - x = 0$$

a d'abord pour racines celles de (1) et, en général, celles de $f^m x - x = 0$, m étant un diviseur de n; elle a aussi des racines qui lui sont propres : elles sont dites d'indice n, et forment des groupes de racines cohérentes. Telles sont les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ satisfaisant aux relations

$$\alpha_2 = f\alpha_1, \qquad \alpha_3 = f\alpha_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha_n = f\alpha_{n-1}, \qquad \alpha_1 = f\alpha_n.$$

L'équation peut admettre d'autres racines cohérentes d'indice n, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, satisfaisant aux mêmes relations. Elles sont toutes distinctes des précédentes ou elles leur sont égales. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$\mu = \alpha_p = \beta_q \qquad \text{et} \qquad \alpha_{p+1} \gtrless \beta_{q+1};$$

on en tirerait

$$\alpha_{p+1} = f\mu, \qquad \beta_{q+1} = f\mu;$$

la fonction f admettrait plus d'une détermination pour une même valeur de la variable, ce qui est contraire à notre hypothèse. Pour la même raison, si, dans un groupe de racines cohérentes, il y en a p égales entre elles, les autres seront aussi égales p à p, et le groupe sera en réalité un groupe de $\frac{n}{p}$ racines cohérentes, répété p fois, de l'équation

$$f^{\frac{n}{p}} x - x = 0,$$

et réciproquement. Si, en particulier, l'une des racines est égale à a racine de $fx - x = 0$, il en sera de même pour toutes les autres.

Considérons maintenant le cas où la dérivée de la fonction donnée prend, au point racine, une valeur

dont le module est 1, et l'argument $\frac{2k\pi}{n}$, k et n étant premiers entre eux; on a toujours, comme l'on sait,

$$\left(\frac{df^p x}{dx}\right)_a = \left(\frac{dfx}{dx}\right)_a^p.$$

Désignons généralement par y_μ la fonction $f^\mu x$, et écrivons la suite des différentes itératives, en plaçant sur une même ligne celles qui admettent au point-racine des dérivées égales; on obtient le Tableau suivant

x (ou y_0)	y_n	y_{2n}	...	y_{qn}	...
y_1	y_{n+1}	...	...	y_{qn+1}	...
y_2	...				
.	.				
y_{n-1}	y_{2n-1}	...	...	$y_{(q+1)n-1}$	...;

l'ensemble de toutes les colonnes donne la suite de toutes les itératives et les fonctions formant la $(h+1)^{\text{ième}}$ ligne ont pour dérivée au point-racine

$$e^{\frac{2k\pi h}{n}\sqrt{-1}}.$$

Les termes d'une même colonne sont liés entre eux par les relations

$$y_{qn+1} = f y_{qn} \ldots y_{(q+1)n-1} = f y_{(q+1)n-2} \ldots.$$

Par suite si, pour une valeur donnée de x, les valeurs des termes d'une même ligne tendent vers une limite unique, il en sera de même pour les autres lignes; on aura

$$y_{qn+1} = f y_{(q+1)n-1};$$

les relations ci-dessus formeront un cycle fermé, et l'ensemble des n limites constituera un groupe de racines cohérentes.

Si, en particulier, une de ces limites est a, il en sera

de même des autres et l'ensemble convergera vers a. Il nous suffit donc de chercher sous quelles conditions les termes d'une quelconque des lignes convergeront vers a.

Parmi les lignes du Tableau ci-dessus, je choisirai la première dont les termes jouissent de la propriété suivante :

Si, en un point-racine de l'équation $fx - x = 0$, la dérivée $\frac{dfx}{dx}$ a une valeur de module 1 et d'argument $\frac{2k\pi}{n}$ k et n étant premiers entre eux, les n premières dérivées de la fonction $f^n x - x$ au même point seront nulles, quelles que soient les dérivées de la fonction fx pourvu qu'elles ne soient pas infinies. Il en sera de même pour $f^{2n}x$, $f^{3n}x$, ...

En effet, pour la dérivée première, on a

$$\left(\frac{df^n(x)}{dx}\right)_a = e^{\frac{2k\pi n}{n}\sqrt{-1}} = 1.$$

En ce qui concerne les autres dérivées, je me reporterai aux formules données par M. Korkine [1]. Comme l'on a, par définition,

$$(2)\qquad f f^n(x-a) = f^n f(x-a),$$

en posant

$$f(x-a) = \sum_{i=1}^{i=\infty} a_i (x-a)^i, \qquad f^n(x-a) = \sum_{j=1}^{j=\infty} \alpha_j (x-a)^j,$$

où

$$a_i = \frac{\left(\frac{d^i fx}{dx^i}\right)_a}{i!}, \qquad \alpha_j = \frac{\left(\frac{d^j f^n x}{dx^j}\right)_a}{j!}.$$

---

[1] *Sur un problème d'interpolation* (*Bulletin des Sc. math.*, 1882; Ire Partie) Je suis obligé de modifier légèrement les notations de l'auteur.

L'équation (2) peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} a_i \left[\sum \alpha_j (x-a)^j \right]^i = \sum_{j=1}^{j=\infty} \alpha_j \left[\sum a_i (x-a)^i \right]^j.$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de $x-a$ dans les deux membres, on a des équations qui permettent de déterminer α_2, α_3, ..., et en tenant compte de ce que α_1 est égal à a_1^n, ces coefficients s'expriment en fonction de n. Je ne rappellerai pas ces formules; pour ce qui suit, il suffit de remarquer que chacun de ces coefficients est de la forme

$$\alpha_p^{(n)} = S\Psi(a_1^n - 1)\frac{P}{Q},$$

S représentant une somme finie de termes dans lesquels Ψ est un monome en a_1, a_2, ..., a_p, l'exposant de plusieurs de ces facteurs pouvant être nul; P un polynome en a_1^n; Q un produit de facteurs binomes de la forme $a^q - 1$, la plus grande valeur que puisse prendre q étant $p-1$. Cela posé, et dans l'hypothèse

$$a_1 = e^{\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

toutes les fois que dans l'expression de $\alpha_p^{(n)}$, l'indice de dérivation p sera non supérieur à l'indice d'itération n, aucun des binomes dont le produit est Q ne sera nul, car le premier qui puisse s'annuler, savoir $a_1^n - 1$, n'y figure pas. Quant au facteur $a_1^n - 1$, il est nul; chacun des termes de la somme est donc nul [1], ce qui dé-

---

[1] Si l'on considère la dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$, elle se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; sa vraie valeur, que l'on aurait facilement, ne sera nulle que s'il existe certaines relations entre les coefficients a_1, a_2, ...

montre la proposition. On a donc

$$y_n - a = x - a + \frac{A_{n+1}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \dots,$$

où A_{n+1} désigne la valeur, au point-racine, de la dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ de y_n. On aura aussi, en général,

$$y_{q+1,n} - a = y_{qn} - a + \frac{A_{n+1}}{(n+1)!}(y_{qn}-a)^{n+1} + \dots.$$

Pour qu'il y ait convergence, il faut que si u est l'affixe d'une itérative de la fonction $f^n x$, supposé à une distance infiniment petite ρ du point a, l'affixe u_1 de la fonction itérative suivante soit à une distance ρ_1 de a plus petite que ρ ; autrement dit que l'on ait

$$\frac{\rho_1}{\rho} = 1 - \varepsilon,$$

ε pouvant être infiniment petit mais positif. Par suite, si l'on pose

$$u - a = \rho e^{\theta\sqrt{-1}}, \qquad u_1 - a = \rho_1 e^{\theta_1\sqrt{-1}}, \qquad A_{n+1} = R e^{\omega\sqrt{-1}},$$

on aura

$$\rho_1 e^{\theta_1\sqrt{-1}} = \rho e^{\theta\sqrt{-1}} + \frac{R e^{\omega\sqrt{-1}}}{(n+1)!}\rho^{n+1} e^{(n+1)\theta\sqrt{-1}},$$

et il faudra avoir

$$\text{mod}\left[\rho e^{\theta\sqrt{-1}} + \frac{R\rho^{n+1}}{(n+1)!} e^{(\omega+(n+1)\theta)\sqrt{-1}}\right] < \rho,$$

ce qui devient, en négligeant les puissances supérieures de ρ,

$$1 + 2\frac{R\rho^2}{(n+1)!}\cos(\omega + n\theta) < 1,$$

ou

$$\cos(\omega - n\theta) < 0.$$

Ainsi, il faudra qu'à partir d'une valeur suffisamment

grande de l'indice d'itération, on ait constamment

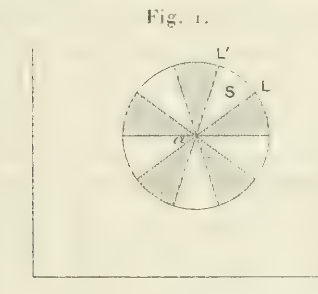
$$\frac{(2h+3)\frac{\pi}{2}-\omega}{n} > \theta > \frac{(2h-1)\frac{\pi}{2}-\omega}{n},$$

ou

$$\frac{h\pi}{n} - \frac{3\frac{\pi}{n}-\omega}{n} > \theta > \frac{h\pi}{n} + \frac{\frac{\pi}{2}-\omega}{n}.$$

Par conséquent, à une distance infiniment petite de a, le domaine de convergence sera composé d'un secteur S, d'amplitude $\frac{\pi}{n}$, compris entre les demi-droites aL,

Fig. 1.



aL' faisant avec l'axe réel, les angles $\frac{\pi-2\omega}{2n}$ et $\frac{3\pi-2\omega}{2n}$, ainsi que des $n-1$ secteurs obtenus en faisant tourner le secteur S des angles $\frac{2\pi}{n}$, $2\frac{2\pi}{n}$, $\ldots$ $(n-1)\frac{2\pi}{n}$. Entre deux secteurs de convergence consécutifs, il existe un secteur de même amplitude $\frac{\pi}{n}$ dans lequel θ ne doit pas être pris. On voit aussi qu'à tout secteur de convergence correspond un secteur opposé par le sommet qui sera secteur de convergence ou non suivant que n est pair ou impair. Si l'on sait inverser la fonction fx, les secteurs de divergence de la substitution $(x, f^n x)$ seront secteurs de convergence de $(x, f^{-n}x)$; mais $f^{-n}x$

admettant, en général, plusieurs déterminations, on n'aura convergence vers a que si l'on choisit, parmi ces déterminations, celle qui se trouvera dans le domaine de a. Considérons maintenant, non plus la substitution $(x, f^n x)$ mais toute autre substitution $(x, f^{n+\nu} x)$: si Θ est un angle limite pour la première $\Theta - \frac{2\nu\pi}{n}$ sera un angle limite pour la seconde; par suite, tout secteur de convergence pour $f^n x$, l'est aussi pour $f^{n+\nu} x$, et finalement fx. On arrive ainsi à ce résultat remarquable : quand le module de la dérivée est plus petit que 1, la surface entière du cercle infiniment petit décrit autour de a comme centre donne convergence pour la substitution directe et divergence pour la substitution inverse; quand le module est égal à 1, une moitié de la surface du cercle donne convergence pour la substitution directe, divergence pour la substitution inverse, l'autre moitié produit l'effet contraire; enfin, quand le module est plus grand que 1, la surface entière du cercle donne divergence pour la substitution directe, convergence pour la substitution inverse; à cause des déterminations multiples de la fonction inverse, la convergence par la substitution correspondante sera d'une application délicate.

Il n'est pas sans intérêt de comparer les résultats ci-dessus avec ceux qu'on obtient directement en considérant le cas où la racine est réelle ainsi que les dérivées $f^{(n)}a$. Supposons la dérivée première égale à 1 au point-racine et la dérivée seconde différente de zéro (*fig.* 2 et 3).

Le chemin brisé rectangulaire, dont les sommets sont alternativement sur la courbe $y = fx$ et sur la droite $y = x$ et parcouru de telle sorte qu'on aille de la courbe à la droite par une parallèle à Ox, représente

par les ordonnées des points 1, 2, 3, ... les valeurs des itératives successives, la valeur initiale étant x; on a, en effet,

$$\text{Ordonnée de } 1 = fx,$$

$$\text{Ordonnée de } 2 = f(\text{ordonnée de } 1) = f^2 x,$$

. . . .

Pour que les valeurs de ces ordonnées convergent vers a, il faut que, si la courbe a ses ordonnées supérieures à celles de la bissectrice des axes, le point de départ soit situé à gauche de a (*fig.* 2). Dans le cas

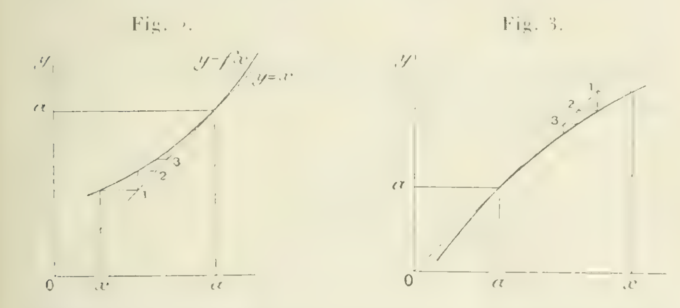


Fig. 2. Fig. 3.

contraire, il devra être pris à droite de ce point (*fig.* 3); par conséquent, les différences $fx - x$, et $x - a$ doivent avoir des signes contraires, ce qui revient à la condition

$$\frac{fx - x}{x - a} < 0.$$

comme on peut écrire

$$fx = x + f''a \frac{(x - a)^2}{2} + \ldots.$$

on devra avoir

$$f''a(x - a) < 0;$$

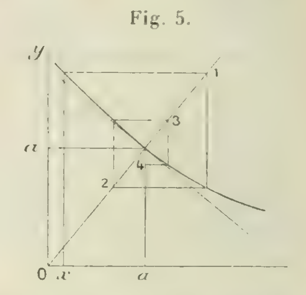
ce qui n'est, comme on peut le vérifier, qu'une conséquence de la condition générale $\cos(\omega + n\theta) \leq 0$.

Si la dérivée première $f'a$ est égale à -1 (*fig.* 4 et 5),

on voit que les valeurs des ordonnées des points 1, 3, 5, ..., 2, 4, 6, ... convergeront vers a, si le rayon

Fig. 4.

Fig. 5.



de courbure r décroît quand on passe au point de contact ; on doit donc avoir

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_a < 0,$$

ce qui, après réduction, équivaut à

$$3(f''a)^2 + 2f'''(a) > 0;$$

c'est la condition à laquelle on arrive encore en écrivant qu'à gauche du point de contact f^2x est plus grande que x, et qu'à droite f^2x est plus petite que x ; autrement dit, que l'on a

$$\frac{f^2x - x}{x - a} < 0.$$

En effet, on peut écrire

$$f^2x - a = f^{2\prime}a(x-a) + f^{2\prime\prime}a\,\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots.$$

Or $f^2x = ffx$, par suite

$$\frac{df^2x}{dx} = \frac{df^2x}{dfx}\,\frac{dfx}{dx}$$

et

$$\frac{d^2f^2x}{dx^2} = \frac{df^2x}{dfx}\,\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{d^2f^2x}{dfx^2}\left(\frac{dfx}{dx}\right)^2;$$

pour $x = a$, on a

$$fx = x, \quad \left(\frac{df^2x}{dfx}\right)_a = \left(\frac{dfx}{dx}\right)_a, \quad \left(\frac{d^2f^2x}{dfx^2}\right)_a = \left(\frac{d^2fx}{dx^2}\right)_a;$$

on a, par conséquent,

$$\left(\frac{df^2x}{dx}\right)_a = (f'a)^2 = 1, \qquad \left(\frac{d^2f^2x}{dx^2}\right)_a = -f''a + f''a = 0.$$

On vérifie ainsi que la dérivée seconde de la fonction f^2x s'annule pour $x = a$.

Pour la dérivée troisième, on a

$$\frac{d^3f^2x}{dz^3} = \frac{d^3fx}{dx^3}\frac{df^2x}{dfx} + 3\frac{d^2f^2x}{dfx^2}\frac{d^2fx}{dx^2}\frac{dfx}{dx} + \frac{d^3f^2x}{dfx^3}\left(\frac{dfx}{dx}\right)^3,$$

et, pour $x = a$, il viendra

$$f^{2'''}a = -2f'''a - 3(f''a)^2;$$

nous aurons donc

$$f^2x = x - [2f'''a + 3(f''a)^2]\frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots$$

et la condition

$$\frac{f^2x - x}{x - a} < 0$$

deviendra bien

$$[-2f'''a - 3(f''a)^2](x-a)^2 < 0 \quad \text{ou} \quad 2f'''a + 3(f''a)^2 > 0;$$

elle rentre encore dans la condition générale.

Considérons maintenant les cas où la première dérivée qui ne s'annule pas pour $x = a$ est d'ordre quelconque. Si elle est d'ordre pair (*fig.* 2 et 3), il y aura convergence soit à droite de a, soit à gauche. Si elle est d'ordre impair (*fig.* 6 et 7) elle peut être négative (*fig.* 6) et la substitution (x, fx) sera convergente à droite de a et aussi à gauche. D'après l'analyse géné-

rale. on trouve en effet deux secteurs de convergence opposés par le sommet et comprenant les directions $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Quand la dérivée considérée est positive (*fig.* 7) le graphique montre qu'il y a divergence,

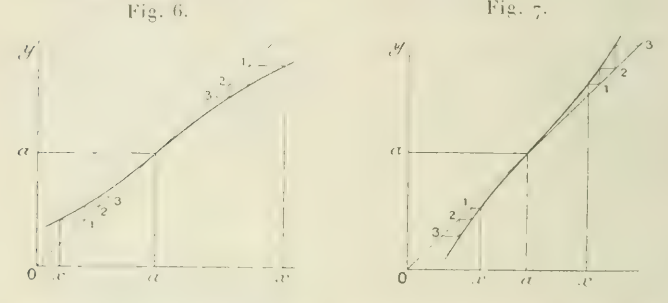


Fig. 6. Fig. 7.

que x soit plus grand que a, ou qu'il soit plus petit. En effet, les secteurs de convergence, encore opposés par le sommet, ne comprennent ni l'un, ni l'autre les directions $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. On ne pourra donc converger vers a, par la substitution directe, qu'en partant de valeurs imaginaires de x convenablement choisies. Soit, par exemple,

$$fx = x + (x - a)^3:$$

il y a deux secteurs de convergence de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{3\pi}{4}$ et de $\frac{5\pi}{4}$ à $\frac{7\pi}{4}$.

On pourra faire, par exemple, $\theta = \frac{\pi}{2}$. En effet, soit $x - a = \rho e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \rho\sqrt{-1}$. On aura

$$fx - a = (\rho - \rho^3)\sqrt{-1}.$$

Si ρ est très petit, compris par suite entre 0 et 1, il y aura convergence, car le module $\rho_1 = \rho - \rho^3$ de $fx - a$ est plus petit que le module ρ de $x - a$.

A distance finie de a, les secteurs de convergence sont limités par des courbes tangentes en a aux droites

limites. Quant au rayon de convergence, il dépendra de la fonction donnée et devra être étudié dans chaque cas particulier; il est clair que le domaine ainsi défini ne devra contenir aucune autre racine soit de l'équation $fx - x = 0$, soit de toute autre équation

$$f^p x - x = 0.$$

Si, par exemple, une fonction satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(3) \qquad \varphi^m x - x = 0,$$

et si a désigne une racine de l'équation

$$\varphi x - x = 0,$$

le domaine de convergence autour de a sera d'un rayon infiniment petit, car si près qu'on se place de a on rencontrera, avant d'y arriver, une infinité de racines de l'équation (3) : il ne peut donc y avoir convergence.

[O8b]

NOTE SUR LES DÉPLACEMENTS D'UNE FIGURE INVARIABLE;

Par M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Je me propose d'indiquer une méthode simple et uniforme pour démontrer le théorème fondamental sur les déplacements finis d'une figure dans un plan ou d'un solide dans l'espace : elle repose sur une considération analogue à celle dont se sert M. Kœnigs pour établir le caractère du déplacement élémentaire d'un solide. J'ajouterai quelques remarques se rapportant à l'une des propriétés caractéristiques de l'hélice.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'amener une figure plane F d'une position donnée à un autre dans son

plan : il suffit, comme on sait, d'amener deux de ses points dans la position qu'ils doivent occuper. Prenons arbitrairement le premier de ces points et soient A, B ses positions initiale et finale dans le plan fixe : pour second point, je choisis celui qui se trouve d'abord en B et qui doit venir en un point C toujours bien déterminé : les droites AB, BC sont nécessairement égales. Soit O le centre de la circonférence passant par les points A, B, C : il est clair qu'en faisant tourner le triangle OAB autour du centre O, on peut l'amener en coïncidence avec son égal OBC, entraînant la figure à déplacer. Si les points A, B, C étaient en ligne droite, ce serait par une translation AB qu'on pourrait réaliser le déplacement donné de F.

Un raisonnement analogue montrerait qu'une rotation suffit pour imprimer un déplacement donné à une figure sur une sphère.

Supposons maintenant qu'on veuille donner un déplacement déterminé à un solide S : soient dans l'espace A, B les positions que doit prendre successivement un de ses points choisi arbitrairement ; le point qui se trouve d'abord en B devra venir en un point C qu'on doit regarder comme connu ; de même le point situé d'abord en C occupera une position D quand S sera dans sa seconde position. Il suffirait d'amener les trois points considérés des positions A, B, C en B, C, D pour donner à S le déplacement voulu. Il y a nécessairement égalité entre les droites AB, BC, CD, comme entre les angles ABC, BCD. Soient PQ la perpendiculaire commune aux bissectrices BB', CC' de ces angles et *pabcd* la projection de la figure PQABCD sur un plan normal à PQ en son milieu. Les angles *pbc*, *pcb* sont égaux comme mesurant des dièdres homologues dans les trièdres BPC*b*, CQB*c* dont les faces sont res-

pectivement égales; donc pb est égal à pc. D'autre part, PB étant perpendiculaire au milieu de AC, pb l'est au milieu de ac, pa est égal à pc et les projections de BA et de BC sur la direction de PQ sont égales; la projection de CD aura aussi la même grandeur et pb est égal à pd. De ce qui précède, il résulte que les points A, B, C, D sont situés sur un cylindre de révolution autour de PQ et même sur une hélice tracée sur ce cylindre : il suffit de faire glisser le long de cette courbe les trois points considérés pour qu'ils passent de A, B, C en B, C, D, entraînant S dans leur mouvement hélicoïdal. Par les points A, B, C, D on pourrait faire passer une infinité d'hélices, mais on se borne à celle dont l'arc AB est moindre qu'une spire. Si les quatre points étaient en ligne droite, on pourrait obtenir le déplacement de S en le faisant glisser le long de AB et tourner autour de cette droite : c'est toujours un mouvement hélicoïdal.

Outre les trois points situés primitivement en A, B, C, nous en pourrions prendre dans S une série d'autres, choisis d'une manière analogue : celui qui, d'abord situé en D, doit passer en un point déterminé E, celui qui part de E et ainsi de suite; on formerait une ligne brisée qui, de la position ABCDE...G passerait en BCDE...GH. Non seulement les côtés et les angles doivent être égaux, mais aussi les dièdres BCAD, CDBE, ...; une telle ligne peut être appelée *ligne brisée régulière gauche à torsion constante*. On voit aisément que les droites CB, CD, les plans CBA, CDE, enfin les bissectrices BB', DD' sont symétriques par rapport à CC'; la perpendiculaire commune à CC' et à DD' est dans le prolongement de PQ, et l'hélice que nous avons vue passer par A, B, C, D passe par E et, de proche en proche, par tous les sommets de la ligne bri-

sée. En supposant les côtés infiniment nombreux et infiniment petits, cette ligne deviendrait une courbe à courbure et à torsion constantes, qui ne différerait pas d'une hélice.

J'établirai enfin deux relations simples entre les éléments de la figure PQABCD. Soient M le milieu de BC, a la longueur MC, $180^\circ - 2\alpha$ l'angle BCD, 2β le dièdre BCAD, θ l'angle de BC avec PQ, R le rayon du cylindre contenant les points A, B, C, D. Si, dans le plan BCD, je mène à MC une perpendiculaire MO qui rencontre CC' au point O, j'aurai

$$\mathrm{MO} = a \cot\alpha, \qquad \mathrm{CO} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Supposons PQ vertical et projetons sur un plan vertical, parallèle à BC : MC se projette en vraie grandeur suivant $m'c'$; la bissectrice CQO a sa projection $c'q'o'$ horizontale; enfin, la projection $m'o'$ de MO est perpendiculaire sur $m'c'$. Le dièdre BCOm', moitié de BCAD, a pour mesure l'angle de MO avec la perpendiculaire Mm' au plan vertical, et l'on a

$$m'o' = \mathrm{MO} \sin\beta = a \cot\alpha \sin\beta;$$

or, dans le triangle $m'o'c'$, l'angle o' est égal à θ et $m'o'$ à $a \cot\theta$: on a donc

$$\cot\theta = \cot\alpha \sin\beta.$$

Quant à R ou CQ, son rapport avec CO est égal à celui de leurs projections et l'on a, sans difficulté,

$$\mathrm{R} = \mathrm{CO}\,\frac{c'q'}{c'o'} = \frac{a}{\sin\alpha}\sin^2\theta.$$

Si l'on passe au cas limite de l'hélice, les deux dernières formules conduisent aux deux relations bien connues

$$\cot\theta = \frac{\rho}{\tau}, \qquad \mathrm{R} = \rho \sin^2\theta.$$

[R8cβ]

SUR LA STABILITÉ D'UNE TOUPIE QUI DORT (SLEEPING);

Résumé d'une Conférence faite devant la Société mathématique américaine à la réunion de Princeton, le 17 octobre 1896,

PAR M. FÉLIX KLEIN.

(*Bulletin of the american mathematical Society*, 2[d] series, Vol. III, n° 4, p. 129-132. New-York, janvier 1897.)

Traduit par M. L. LAUGEL.

Dans les quatre Conférences (¹) de la première partie de la semaine, je me suis efforcé de simplifier les formules relatives au mouvement de la toupie, en profitant des méthodes de la théorie moderne des fonctions. En traitant ce problème j'ai été surtout influencé par cette considération qu'il est désirable de renforcer des deux parts les relations entre les Mathématiques pures et la Mécanique.

Je vais, aujourd'hui, considérer, au même point de vue, une question beaucoup plus élémentaire, mais qui, précisément pour cette raison, servira de type pour nombre de problèmes de ce genre; c'est le problème relatif à la stabilité d'une toupie animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe dirigé en l'air verticalement. Nous supposerons le point de support fixe.

(¹) Quatre Conférences « Sur la Théorie de la Toupie », faites par M. Klein, à l'invitation de l'Université de Princeton, à l'occasion de son 150[e] anniversaire.

S'il était mobile sur un plan horizontal, les formules seraient un peu plus compliquées, mais le résultat final serait tout pareil à celui dans le cas spécial.

Lorsque la rotation est très rapide la toupie se comporte comme si l'axe était maintenu fixe par une force spéciale. Cette idée a été employée par Foucault, par exemple, en 1851; mais regarder cette idée comme étant un principe de Mécanique indépendant est, cela va sans dire, une absurdité.

La méthode habituelle au moyen de laquelle on attaque le problème est celle *des petites oscillations.* Soient x, y les coordonnées horizontales du point de support de la toupie, n la vitesse de rotation et P le moment du poids de la toupie; alors, en négligeant les puissances supérieures de x et y, nous obtenons les équations différentielles linéaires homogènes suivantes à coefficients constants

$$x'' + ny' - Px = 0,$$
$$y'' - nx' - Py = 0.$$

Dans ces équations, les termes en x' et y' sont dits les termes gyroscopiques. Les solutions des équations renferment l'exposant caractéristique

$$\lambda = \frac{\pm in \pm \sqrt{4P - n^2}}{2}.$$

Relativement à la forme de cet exposant, l'on distingue d'habitude deux cas : le *cas stable,* $n^2 > 4P$, et le *cas instable* $n^2 < 4P$; l'on conclut alors de la discussion que, dans le premier cas, ont lieu actuellement des oscillations autour de la position d'équilibre, tandis que, dans le second, l'axe s'écarte indéfiniment de la position d'équilibre.

Dans le cas stable, nous obtenons

$$x = a \cos \frac{nt}{2} \cdot \sin \sqrt{\frac{n^2 - 4P}{4}}\, t,$$

$$y = a \sin \frac{nt}{2} \cdot \sin \sqrt{\frac{n^2 - 4P}{4}}\, t,$$

où a est une constante d'intégration.

Je conserverai les désignations *stable* et *instable* pour les cas respectifs $n^2 > 4P$ et $n^2 \leqq 4P$, et j'examinerai si le mouvement correspond véritablement à l'acception habituelle que l'on donne à ces mots.

Dès le début, cette méthode des petites oscillations prête à une critique sévère. Dans le cas dit *instable*, elle est en contradiction directe avec elle-même, car les quantités qui, dans la formation de l'équation différentielle, sont supposées être *petites*, deviennent *grandes* après l'intégration de l'équation. Par conséquent, il n'y a absolument aucune raison pour regarder les résultats comme étant une approximation des conditions véritables. Et dans le cas stable même, la méthode ne repose pas sur une base solide.

M. Poincaré, dans les questions correspondantes du domaine de l'Astronomie, pousse les développements en séries jusqu'aux termes plus élevés. Mais, même si nous admettons que les séries soient convergentes, leur région de convergence s'étend-elle suffisamment pour que l'on puisse de ces séries déduire le véritable caractère du mouvement? Dans le cas de la toupie, nous n'avons pas à nous préoccuper de la discussion laborieuse de cette question, car l'intégration complète peut être effectuée sous forme explicite.

Je propose de traiter le problème de la manière suivante. Pour simplifier nous supposerons que les moments d'inertie de la toupie par rapport à ces axes

principaux sont égaux à 1. L'axe étant primitivement vertical, soient ϑ et Ψ les angles polaires à l'instant quelconque t, et soit $\cos\vartheta = u$.

Les formules d'intégration sont alors

$$t = \int_1 \frac{du}{\sqrt{U}}, \qquad \Psi = n \int_1 \frac{du}{(u+1)\sqrt{U}},$$

où

$$U = 2(u-1)[n^2 + (Pu - n)(u-1)].$$

L'extrémité supérieure de l'axe (l'*apex* de la toupie) décrit dans tous les cas, sur la surface de la sphère circonscrite, une rosace formée par un nombre de boucles congruentes. Il en est encore ainsi lorsque $n = 0$, une boucle étant alors identique à un grand cercle de la sphère. Notre attention se porte alors sur cette question centrale : quelle est la *longueur* de ces boucles, c'est-à-dire jusqu'à quelle valeur la quantité $u = e$ diminue-t-elle, en partant de la valeur $u = 1$. Ici $u = e$ est cette racine de $U = 0$, qui est comprise entre $u = +1$ et $u = -1$. Pour obtenir, d'autre part, la largeur des boucles, il serait nécessaire de faire la discussion de l'intégrale Ψ.

Si nous introduisons la lettre ν pour désigner, lorsque $u = 1$, la vitesse angulaire $\frac{d\vartheta}{dt}$ de l'axe de la toupie, cette vitesse étant égale à la mesure de l'impulsion latérale, par l'effet de laquelle l'axe est écarté de la position verticale, nous tirons de $U = 0$, en écrivant e au lieu de u,

$$\nu^2 = \frac{(1-e)[n^2 - 2P(e-1)]}{e-1}.$$

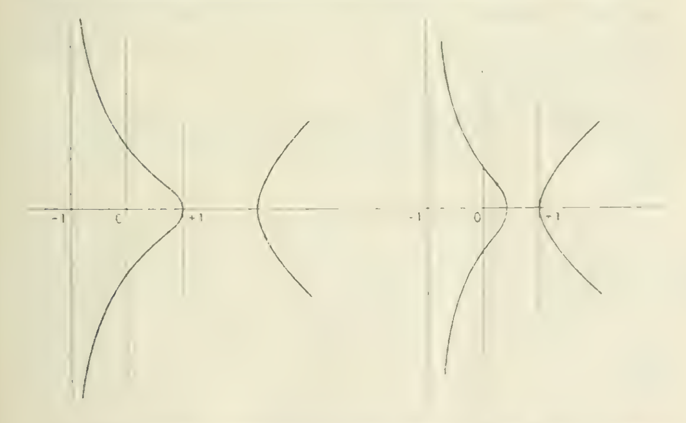
Lorsque e et u désignent des coordonnées rectangulaires, cette équation, interprétée comme il convient, représente une cubique plane, symétrique par rapport à l'axe des e, ayant au point $e = 1$, $\nu = 0$, une tangente verticale, et ayant la droite $e - 1 = 0$ pour asymptote.

Cette courbe a une certaine différence de situation selon que

$$n^2 - 4P > 0 \quad \text{ou} \quad n^2 - 4P < 0$$

(nous pouvons, en vue d'abréger, laisser de côté le cas $n^2 - 4P = 0$). Dans le premier cas (stable), la branche impaire de la courbe passe par le point $e = +1$, $v = 0$, tandis que, dans le second cas (instable), c'est la branche paire qui passe par ce point.

Dans les deux cas c'est la branche impaire qui joue un rôle dans le mouvement effectif de la toupie, puisque $u = \cos\vartheta$ est compris, pour ϑ réel, entre -1 et $+1$. Dans les deux cas aussi, la différence $1 - e$, c'est-à-dire la longueur des boucles de la rosace, diminue avec v.



La différence caractéristique entre les deux cas est celle-ci :

Pour $n^2 - 4P > 0$, la différence $1 - e$ diminue avec v, jusqu'à 0, tandis que si $n^2 - 4P < 0$ cette différence ne dépasse jamais une certaine limite inférieure différente de zéro. Par suite, dans le cas instable, les boucles de la rosace prennent de suite une certaine longueur finie, quelque petite que soit l'impulsion latérale donnée à la toupie.

Théoriquement, ceci fournit une distinction bien accentuée entre les deux cas; dans la pratique cependant cette différence peut devenir inappréciable, si $n^2 - 4P$ étant < 0, devient en même temps très petit en valeur absolue. La rosace, dans le cas instable, peut devenir aussi petite que l'on veut, et, étant donnée une rosace stable, un choix convenable des constantes n et ν donnera, dans le cas instable, une rosace *plus petite* que la rosace stable.

Or ce résultat est en désaccord avec l'acception usuelle des mots *stable* et *instable*. De plus, il ne confirme pas les prétentions de la méthode des petites oscillations. Si l'extrémité supérieure de l'axe, dans le cas instable, décrit une *petite* rosace, pourquoi cette circonstance n'est-elle pas mise en évidence par la méthode des petites oscillations?

La réponse à cette dernière question s'aperçoit immédiatement, si nous introduisons la quantité e dans l'intégrale t

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2(u-e)(1-u)}{1+e}[n^2 - 4P(u-1)(e-1) + 2(u-1) + 2(e-1)]}}.$$

La méthode des petites oscillations, dans la parenthèse

$$n^2 - 4P - P(u-1)(e-1) + 2(u-1) + 2(e-1),$$

néglige, par rapport à $n^2 - 4P$, les termes renfermant $u - 1$ et $e - 1$. Or cela est admissible au seul et unique cas où, $u - 1$ et $e - 1$ étant petits, $n^2 - 4P$ *n'est pas petit*, et, par conséquent, les cas, soit stables, soit instables, lorsque $n^2 - 4P$ est une petite quantité, échappent au traitement approximatif par la méthode des petites oscillations.

CORRESPONDANCE.

M. C. Bourlet. — L'Exercice II de Licence (p. 236-237) constitue une proposition qui n'est pas de moi, mais qui appartient en réalité à M. Pincherle, professeur à l'Université de Bologne; il l'a publiée dans une Note aux *Comptes rendus de la R. Acc. dei Lincei*. Je me suis rencontré, sans le savoir, avec M. Pincherle, dans quelques-uns de mes récents travaux.

M. Wladimir Habbé. — Le triangle de M. Guillot (1897; p. 237), indiqué pour la construction approchée de π, est identique à celui de Bing (*Scientific american Supplement*, n° 500, p. 7989, 1er août 1885).

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1897.

Composition de Mathématiques.

On donne dans un système d'axes rectangulaires $Oxyz$: la droite AB, qui a pour équations $x = a$, $y = z$; le point C, qui a pour coordonnées $x = 0$, $y = 0$, $z = a$. On considère l'hyperboloïde (H), engendré par la rotation de AB autour de Oz, puis la sphère (S), qui a pour centre C et qui est tangente à AB.

I. Trouver les équations des surfaces (H) et (S).

II. Déterminer leur courbe commune et calculer (¹) le rapport de la plus grande à la plus petite surface que cette courbe découpe sur la sphère. (Il suffira de donner le résultat avec 2 décimales.)

III. Autour d'un point P de Oz, dont la cote est $z = h$,

(¹) Les calculs seront faits sur la feuille.

pivote une sécante qui perce l'hyperboloïde (H) en un point H, et la sphère (S) en un point S. On demande : d'étudier le lieu de l'intersection M des diamètres OH et CS ; de discuter les coefficients angulaires de ses directions asymptotiques, quand le point P décrit l'axe Oz.

Épure.

On donne dans le plan vertical de projection un cercle de rayon égal à 60^{mm}, dont le centre C est situé à droite de la ligne yy' qui divise la feuille en deux parties égales parallèlement aux grands côtés, à une distance CD de cette ligne égale à 80^{mm} et à 327^{mm} du bord inférieur de la feuille. Ce cercle, en tournant autour de yy', engendre un tore plein.

Une sphère pleine, de rayon égal à 90^{mm}, touche le plan du cercle précédent en un point O′ situé au-dessous de CD, à 50^{mm} du point C et à 40^{mm} à droite de yy'. La projection horizontale O du centre de la sphère est à 180^{mm} au-dessous de O′ sur une parallèle à yy'.

On construira l'intersection du tore et de la sphère et l'on représentera par ses projections ce qui reste de la sphère en supprimant la partie comprise dans le tore, les parties vues étant en traits noirs pleins et les parties cachées en pointillé.

On indiquera en traits pleins rouges les constructions nécessaires pour déterminer un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point, ainsi que les points remarquables. On tracera en rouge également les parties des deux surfaces en dehors de l'intersection.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1897.

Composition de Mathématiques.

On considère deux hyperboloïdes à une nappe H et H′ se coupant suivant deux coniques S et Σ dont aucune ne se décompose ; ces deux coniques ont, comme on sait, deux points

communs A et B que l'on suppose distincts. Soit μ un point quelconque de Σ; par ce point passent quatre génératrices rectilignes (deux sur H et deux sur H′) qui rencontrent S aux quatre points M, N, M′, N′.

I. Trouver l'enveloppe des six droites qui joignent deux à deux ces *quatre* points ; on trouvera *quatre* coniques que l'on désignera par c, c', C_1, C_2, les coniques c et c' d'une part, C_1, C_2 d'autre part jouant un rôle analogue. On indiquera dans quels cas l'une de ces coniques se réduit à un point.

II. Dans cette seconde partie, on ne regarde plus H et H′ comme donnés; on se propose au contraire de remonter à la figure primitive en partant des éléments auxquels on a abouti et que l'on a étudiés dans la première partie :

1° On donne la conique S; peut-on choisir arbitrairement l'une des quatre coniques c, c', C_1, C_2? Les trois autres sont-elles alors déterminées?

2° On donne S et c ou C_1, à quelles conditions est assujettie Σ? Si l'on donne en outre Σ, à quelles conditions sont assujettis H et H′? Il y a lieu ici de distinguer deux cas, suivant que l'on donne c ou C_1. Dans l'un de ces deux cas, les deux hyperboloïdes sont variables, mais chacun d'eux est déterminé quand on fixe l'autre : trouver alors l'enveloppe E de la droite D qui joint les pôles d'un plan fixe Π par rapport aux deux hyperboloïdes (on remarquera d'abord que la droite D reste dans un plan).

3° Écrire l'équation du lieu engendré par E lorsque le plan Π tourne autour d'une droite fixe.

N. B. — Les candidats qui, pour traiter la première partie, seraient embarrassés dans le choix des axes, peuvent, s'ils le veulent, prendre pour axe des x la droite AB; pour axe des y la tangente en A à la conique S; pour axe des z la tangente en A à la conique Σ; *mais ce choix d'axes n'est nullement obligatoire.*

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1897.

Mathématiques spéciales.

I. Soit $Oabc$ un tétraèdre T trirectangle au sommet O, dont les arêtes Oa, Ob, Oc ont la même longueur l, et soit d le centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre.

On suppose que le tétraèdre T se déplace par rapport à un trièdre trirectangle fixe OX, OY, OZ de manière que les points a, b, c, d décrivent respectivement les plans qui ont pour équations

$$Y + Z = 0, \qquad Z + X = 0, \qquad X + Y = 0,$$

$$X + Y + Z + \frac{l}{2} = 0.$$

1° Démontrer que les points symétriques des points a, b, c, d par rapport aux arêtes Oa, Ob, Oc du tétraèdre T décrivent également des plans.

2° Trouver l'équation de la surface S décrite par le sommet O du tétraèdre T. Cette surface, qui est du quatrième degré, a un point triple et trois droites doubles.

3° Par chaque point α d'une droite double passent deux droites δ et δ' qui rencontrent la surface S en quatre points confondus. Chercher pour quelles positions du point α sur cette droite double les droites δ et δ' coïncident.

4° Montrer que tout plan tangent à la surface S coupe cette surface suivant deux coniques et que ces deux coniques se confondent pour quatre positions particulières du plan tangent.

II. Soit $\varphi(x)$ une fonction de la variable réelle x, continue pour toute valeur de cette variable. On suppose que la valeur absolue de la dérivée $\varphi'(x)$ est, pour toute valeur de x, inférieure à un nombre fixe k plus petit que 1 :

1° Montrer que l'équation $x - \varphi(x) = 0$ a une et une seule racine réelle a.

2° On forme la suite $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$, ..., $x_n = \varphi(x_{n-1})$,

où x_0 est une quantité réelle arbitrairement choisie. Montrer que x_n tend vers a quand n devient infini.

Nota. — On a

$$a = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta,$$
$$b = - \sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\theta,$$
$$c = \sin\psi \sin\theta;$$
$$a' = \cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\theta,$$
$$b' = - \sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos\theta,$$
$$c' = - \cos\psi \sin\theta;$$
$$a'' = \sin\varphi \sin\theta,$$
$$b'' = \cos\varphi \sin\theta,$$
$$c'' = \cos\theta;$$
$$X = ax + by + cz,$$
$$Y = a'x + b'y + c'z,$$
$$Z = a''x + b''y + c''z.$$

Mathématiques élémentaires.

On donne dans l'espace trois droites (A), (B), (C). On mène un plan ϖ perpendiculaire à A ; soient P, Q, R les points où ce plan rencontre respectivement les droites (A), (B), (C). Soient Q′ le point où la droite A est rencontrée par le plan perpendiculaire à (C), mené par le point Q, et R′ le point où la droite A est rencontrée par le plan perpendiculaire à B, mené par le point R. Démontrer que la longueur du segment Q′R′ reste la même quand le plan ϖ se déplace parallèlement à lui-même.

Existe-t-il des plans coupant les droites (A), (B), (C) en trois points A, B, C, tels que les droites BC, CA, AB soient respectivement rectangulaires avec les droites (A), (B), (C)? S'il existe un pareil plan, il en existe une infinité.

Existe-t-il un point M, tel que si l'on désigne par M′ son symétrique par rapport à la droite A et par M″ le symétrique de M′ par rapport à la droite (B), les points M′ et M″ soient symétriques par rapport à la droite (C)? S'il existe un tel point M, il en existe une infinité. Quel est alors leur lieu?

On examinera le cas particulier où les trois droites (A), (B),

(C) ont un point commun et le cas plus particulier encore où elles forment un trièdre trirectangle.

Dans le cas particulier où les droites (A), (B) ont un point commun O et où la droite (C) est perpendiculaire au plan de ces deux droites, sans passer par le point O, on déterminera le lieu des pieds des hauteurs du triangle ABC et le lieu du point de rencontre de ces hauteurs. L'un des pieds est fixe.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1546.

(1885, p. 487 et 573.)

Par le foyer d'une parabole on mène trois rayons vecteurs faisant entre eux des angles égaux, et en leurs milieux on élève des perpendiculaires qui, en se rencontrant, forment un triangle équilatéral.

Démontrer que le lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle est une parabole, et que l'enveloppe de ce cercle se compose d'une droite et d'un cercle.

(E. Fauquembergue.)

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Cette question a été proposée aussi par M. Fauquembergue, en 1885, dans *Mathesis*, où une solution a été publiée en 1887 (p. 97, n° 491).

Voici une autre solution.

Les milieux I, K, L des rayons vecteurs FA, FB, FC, appartiennent à une parabole. On peut donc considérer les perpendiculaires menées aux extrémités de ces mêmes rayons vecteurs. Elles déterminent un triangle équilatéral, A'B'C', dont les côtés sont trois tangentes à la podaire négative de la parabole par rapport au foyer, courbe connue, signalée ou étudiée maintes fois dans ce Journal (1866, 21-31; 1876, 99, 101, etc.).

Les trois points de contact de trois tangentes formant un

triangle équilatéral $A'B'C'$ sont sur un même rayon vecteur de la courbe. Ils sont en ligne droite avec le point F (*loc. cit.*).

La question 1546 est donc identique avec la question 1266, posée, t. VII (2), p. 240, 1878, et dont voici l'énoncé :

Si, par le pôle de l'orthogénide

$$\rho^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}} \sin\left(-\frac{1}{3}\omega\right),$$

on mène une droite quelconque, les tangentes aux points d'intersection de cette droite avec l'orthogénide forment un triangle équilatéral. Trouver le lieu du centre de ce triangle et l'enveloppe du cercle circonscrit, lorsque la droite oscille autour du pôle. (E. Lucas.)

M. Fauquembergue en a récemment donné la solution (1895, p. 5*). Nous y renverrons donc le lecteur.

Question 1700.

(1895, p. 38*.)

Dans la parabole, le produit des rayons de courbure aux pieds des normales abaissées d'un point sur la parabole, est égal à 8 fois le cube de la distance du point d'émission des normales au foyer. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Les pieds des normales abaissées du point (α, β) sur la parabole $y^2 = 2px$ sont sur l'hyperbole d'Apollonius du point $\alpha\beta$; $xy + y(p - \alpha) - p\beta = 0$. En éliminant y ou x entre ces équations, on obtient l'équation aux abscisses ou aux ordonnées des pieds des normales.

Équation aux abscisses

$$x^3 + 2(p - \alpha)x^2 + (p - \alpha)^2 x - \frac{p\beta^2}{2} = 0,$$

d'où

$$x' + x'' + x''' = -2(p - \alpha), \qquad x'x''x''' = \frac{p\beta^2}{2}.$$
$$x'x'' + x'x''' + x''x''' = (p - \alpha)^2$$

On sait que le rayon du cercle de courbure au point x, y de

la parabole est donné par la formule

$$R = p\left(\frac{2px' - 4x_1^2}{y_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

On aura donc, pour le produit demandé,

$$\begin{aligned}
P &= p^3\left[\frac{8x'x''x'''(p+2x')(p+2x'')(p+2x''')}{y_1^2y_2^2y_3^2}\right]^{\frac{3}{2}}\\
&= p^3\left[\frac{(p+2x')(p+2x'')(p+2x''')}{p^3}\right]^{\frac{3}{2}}\\
&= p^3\left[\frac{p^3+2p^2(x'+x''+x''')+4p(x'x''+x'x'''+x''x''')+8x'x''x'''}{p^3}\right]^{\frac{3}{2}}\\
&= p^3\left[\frac{p^3-4p^2(p-\alpha)+4p(p-\alpha)^2+4p\beta^2}{p^3}\right]^{\frac{3}{2}}\\
&= [(p-2\alpha)^2+4\beta^2]^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Or la distance du point O au foyer F est donné par la formule

$$OF = \sqrt{\left(\alpha - \frac{p}{2}\right)^2 + \beta^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2\alpha - p)^2 + 4\beta^2},$$

$$8\,\overline{OF}^3 = [(2\alpha - p)^2 + 4\beta^2]^{\frac{3}{2}};$$

donc

$$P = 8\,\overline{OF}^3. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Question 1713.

(1896, p. 103.)

Trouver par l'analyse le lieu du foyer mobile d'une conique d'excentricité donnée dont l'autre foyer est fixe et dont la directrice correspondant à ce foyer enveloppe une courbe donnée. Vérifier le résultat trouvé par la Géométrie. (B. Niewenglowski.)

SOLUTION

Par M. G. Dulimbert.

Le foyer fixe étant pris pour origine, l'équation générale des coniques du faisceau est de la forme

$$(u^2 + v^2)(x^2 + y^2) - \varepsilon^2(ux + vy - 1)^2 = 0$$

avec

$$f(u, v) = 0,$$

α et β étant les coordonnées du foyer mobile, l'équation doit pouvoir s'identifier avec

$$(u^2 + v^2)[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] - \varepsilon^2(ux + vy - p)^2 = 0.$$

Les coefficients de x^2, xy, y^2 étant les mêmes dans les deux équations, les autres doivent l'être aussi, ce qui donne

$$\begin{aligned} u\,\varepsilon^2(p - 1) &= \alpha(u^2 + v^2), \\ v\,\varepsilon^2(p - 1) &= \beta(u^2 + v^2), \\ \varepsilon^2(p^2 - 1) &= (\alpha^2 + \beta^2)(u^2 + v^2). \end{aligned}$$

Élevons au carré les deux premières équations et ajoutons membre à membre. Il vient, en tenant compte de la troisième,

$$\frac{\varepsilon^2(p - 1)}{p + 1} = 1, \qquad p = \frac{\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon^2 - 1}.$$

On en tire $p - 1 = \dfrac{2}{\varepsilon^2 - 1}$. Donc enfin

$$\frac{\alpha}{u} = \frac{\beta}{v} = \frac{2\,\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 - 1)(u^2 + v^2)}.$$

Résolvons ces équations par rapport à u et v. Il vient

$$u = \frac{2\,\varepsilon^2\,\alpha}{(\varepsilon^2 - 1)(\alpha^2 + \beta^2)}, \qquad v = \frac{2\,\varepsilon^2\,\beta}{(\varepsilon^2 - 1)(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

L'équation du lieu est donc

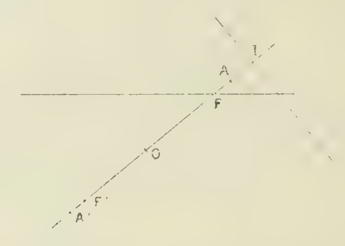
$$f\left[\frac{2\,\varepsilon^2 x}{(\varepsilon^2 - 1)(x^2 + y^2)}, \quad \frac{2\,\varepsilon^2 y}{(\varepsilon^2 - 1)(x^2 + y^2)}\right] = 0.$$

Or $f\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right) = 0$ représente la podaire de l'enveloppe de la directrice par rapport au foyer fixe. En effet, cette équation résulte de l'élimination de u et de v entre les équations

$$\begin{aligned} ux + vy - 1 &= 0, \\ vx - uy \quad &= 0, \\ f(u, v) &= 0. \end{aligned}$$

Le lieu cherché est donc une courbe homothétique de la podaire de l'enveloppe de la directrice par rapport au foyer fixe, le centre d'homothétie étant ce foyer, et le rapport d'homothétie $\frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1}$.

Pour vérifier ce résultat géométriquement, supposons que la courbe donnée soit une ellipse; le raisonnement est identique pour l'hyperbole.



Soient I le pied de la directrice, O le centre, F, F' les foyers, A, A' les sommets de l'axe focal. Puisque l'homothétie est inverse, il faut démontrer que

$$\frac{FF'}{FI} = \frac{2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}.$$

Prenons FI pour unité. La figure donne

$$\frac{AF}{\varepsilon} = \frac{AI}{1} = \frac{1}{1 - \varepsilon},$$

$$\frac{A'I}{1} = \frac{A'F}{\varepsilon} = \frac{1}{1 - \varepsilon},$$

$$AA' = A'I - AI = \frac{1}{1 - \varepsilon} - \frac{1}{1 - \varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2},$$

$$FF' = AA' \times \varepsilon = \frac{2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}.$$ C. Q. F. D.

Dans le cas de l'hyperbole, l'homothétie est directe.

Autre solution de M. AUDIBERT.

Question 1723.

(1896, p. 199)

Trouver les limites de la fraction

$$\frac{\varepsilon^{ax} - \varepsilon^{bx}}{a^{\varepsilon x} - b^{\varepsilon x}},$$

lorsque

$$1^\circ \quad x = 0,$$

$$2^\circ \quad x = \infty,$$

$$3^\circ \quad a = b,$$

respectivement. (R.-W. GENESE.)

SOLUTION

Par M. G. TZITZÉICA.

1° $x = 0$. — On peut développer en série, ou, ce qui est la même chose, appliquer la règle de l'Hôpital. On trouve pour la limite

$$\frac{(a-b)\log\varepsilon}{\varepsilon\log\frac{a}{b}}.$$

2° $x = \infty$. — On peut considérer différents cas. Supposons d'abord $a > b$ et $\varepsilon > 1$. On a alors

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varepsilon^{ax} - \varepsilon^{bx}}{a^{\varepsilon x} - b^{\varepsilon x}} = \lim \frac{\varepsilon^{ax}\left[1 - \varepsilon^{-(a-b)x}\right]}{a^{\varepsilon x}\left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon x}\right]} = \lim \left(\frac{\varepsilon^a}{a^\varepsilon}\right)^x.$$

Dans ce cas la limite cherchée est 0 ou ∞, suivant que $\varepsilon^a < a^\varepsilon$ ou $\varepsilon^a > a^\varepsilon$.

Soit maintenant $a > b$ et $\varepsilon < 1$. Alors

$$\lim \frac{\varepsilon^{ax} - \varepsilon^{bx}}{a^{\varepsilon x} - b^{\varepsilon x}} = \lim \frac{\varepsilon^{bx}\left[\varepsilon^{(a-b)x} - 1\right]}{a^{\varepsilon x}\left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{\varepsilon x}\right]} = -\lim \left(\frac{\varepsilon^b}{a^\varepsilon}\right)^x = 0 \text{ ou } \infty,$$

suivant que $\varepsilon^b < a^\varepsilon$ ou $\varepsilon^b > a^\varepsilon$.

On pourra considérer de même le cas $a < b$ et $\varepsilon \gtrless 1$.

3° Appliquons la règle de l'Hôpital, en prenant les dérivées des deux termes de la fraction par rapport à a. On trouve de

la sorte

$$\frac{\xi^{ax}-1}{a^{\xi x}-1}\log\xi$$

pour la limite cherchée.

QUESTIONS.

1771. Soit ABC un triangle équilatéral ; (S) le cercle inscrit dans ce triangle ; abc un triangle équilatéral inscrit dans le cercle (S) :

1° Les droites Aa, Bc, Cb se coupent en un même point α ;

2° Quand le triangle abc se meut dans le cercle (S), le point α décrit une hypocloïde à trois rebroussements.

3° Construire la tangente au point α en partant de ce mode de génération de la courbe. (GENTY.)

1772. Trouver le lieu des points M tels qu'en menant à une ellipse les tangentes qui la touchent en A et B, le cercle circonscrit au tiangle MPQ soit tangent à l'ellipse.

Même question pour la parabole. (E.-N. BARISIEN.)

1773. Étant donnés une cycloïde de base AB et un cercle ayant son centre au milieu C de AB, on prend la podaire de la cycloïde par rapport à un point quelconque M du cercle. Prouver que l'aire comprise entre la podaire, la droite AB et les deux tangentes en A et B à la cycloïde est constante.

(E.-N. BARISIEN.)

1774. Le produit des paramètres de distribution des plans tangents ([1]) à un paraboloïde hyperbolique, pour deux génératrices du même système et rectangulaires, est égal au carré de la plus courte distance de ces droites.

(MANNHEIM.)

([1]) Il serait plus court de dire : le produit des *paramètres tangentiels*. Il me semble que rien n'empêcherait d'adopter cette manière de parler. (M.)

[D6b]

PREMIER CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1897;

Par M. A. PAGÈS [1].

Établir les propriétés fondamentales des fonctions circulaires en prenant comme définition de $\frac{\sin \pi x}{\pi}$ *l'expression*

$$(1) \qquad S(x) = x\Pi'\left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}\right],$$

le produit Π' *étant étendu à toutes les valeurs de l'entier* n *de* $-\infty$ *à* $+\infty$, 0 *excepté.*

On pourra introduire la fonction

$$C(x) = \frac{S'}{S} = \frac{d}{dx}\log S(x);$$

montrer qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dC(x)}{dx} = -[\pi^2 - C^2(x)]$$

et en déduire les formules d'addition pour $C(x)$ *et* $S(x)$.

Développement.

Je me propose d'établir les propriétés fondamentales des fonctions circulaires, comme l'indique le titre de la question, de la manière la plus élémentaire et la plus directe. La difficulté du sujet ne consiste pas dans la valeur des résultats à trouver, mais bien dans la mise en

(1) Mémoire ayant obtenu le prix.

lumière des propriétés que l'on doit appeler *fondamentales* et dans le choix de ces propriétés.

Je qualifierai de *fondamentales* les propriétés suivantes :

La périodicité et ses conséquences, les relations algébriques qui existent entre les fonctions circulaires aux mêmes périodes, les théorèmes d'addition qui dérivent des relations précédentes, les diverses formes analytiques sous lesquelles on peut mettre ces fonctions et le lien qui les rattache à l'exponentielle.

Telle sera la marche suivie dans l'étude de $S(x)$ et $C(x)$. A la fin je dirai un mot des équations

$$S(x) = S(x_0), \qquad C(x) = C(x_0) :$$

ce qui conduit aux fonctions inverses. Après cela, tout ce qui reste à étudier n'est qu'une conséquence immédiate des propriétés précédentes et se retrouve partout.

Enfin, je terminerai en donnant, d'après M. Hermite, l'expression de toute fonction circulaire sous la forme de la décomposition en éléments simples et sous la forme d'un quotient de deux produits de fonctions S, et en énumérant quelques propriétés générales de ces fonctions.

Dans le courant du raisonnement plusieurs démonstrations se sont présentées pour certaines propriétés : j'ai toujours choisi celle qui supposait le moins de connaissances et qui se rapprochait le plus des définitions : on en verra un exemple dans le théorème d'addition de la fonction $C(x)$, démonstration qui, d'ailleurs, est empruntée à Eisenstein.

1° *Propriétés préliminaires des fonctions*

$$S(x), \quad C(x) \quad \text{et} \quad \frac{dC(x)}{dx}.$$

I. La fonction

$$(1) \qquad S(x) = x\Pi'\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}\right],$$

où le produit Π' est étendu à toutes les valeurs de l'entier n de $-\infty$ à $+\infty$, zéro excepté, est régulière en tous les points à distance finie. Elle admet pour seuls zéros les points $x=0$, $x=\pm 1$, $x=\pm 2$, ... De plus elle est impaire; en effet, on peut poser, en changeant le signe de x,

$$S(x) = x\Pi'\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right].$$

Changeons x en $-x$, dans cette égalité, et comparons à la première forme de $S(x)$, on voit que

$$S(-x) = -S(x).$$

Le point ∞ est un point singulier essentiel de $S(x)$; en effet, si l'on fait $x = \frac{1}{x'}$, on voit que dans une aire aussi petite qu'on le veut, entourant le point $x'=0$, la fonction $S\left(\frac{1}{x'}\right)$ admet une infinité de zéros, $x' = \frac{1}{n}$. Le point $x'=0$ est donc un point singulier essentiel.

Prenons la dérivée logarithmique de $S(x)$ et posons

$$(2) \qquad C(x) = \frac{S'}{S} = \frac{1}{x} + \sum_n{}' \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{n}\right),$$

le symbole $\sum_n{}'$ indiquant une sommation étendue à toutes les valeurs de l'entier n de $-\infty$ à $+\infty$; l'accent ($'$) signifie que la valeur $n=0$ est exclue comme, d'ailleurs, dans le produit Π'.

La fonction $C(x)$ est aussi impaire : cela résulte de ce que, $S(x)$ étant impaire, $S'(x)$ est paire. Le développement (2) montre qu'elle a pour pôles simples tous les points 0, ± 1, ± 2, ..., et ceux-là seulement, le

résidu relatif à chacun de ces pôles étant 1. Le développement (2) met donc en évidence les pôles et les parties principales correspondantes de la fonction. Le point $x = \infty$ est un point singulier essentiel pour $C(x)$ comme pour $S(x)$.

Il est aisé de reconnaître que $C(x)$ s'annule pour $x = \frac{1}{2}$.

On a, en effet,

$$C\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \lim_{p=\infty} \sum_{n=1}^{n=p} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} - n} + \frac{1}{n}\right) + \lim_{p=\infty} \sum_{n=-1}^{n=-p} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} - n} + \frac{1}{n}\right).$$

Le second membre est la limite pour p infini de

$$\begin{aligned} 2 &+ \left(1 - \frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{2p-1}\right) \\ &+ \left(\frac{2}{3} - 1\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{2}{2p+1} - \frac{1}{p}\right) = \frac{2}{2p+1}, \end{aligned}$$

limite qui est évidemment nulle.

Considérons maintenant la fonction

$$(3) \qquad p(x) = -\frac{dC}{dx} = \sum_{n} \frac{1}{(x-n)^2},$$

le signe $\sum_n$ s'étendant à toutes les valeurs entières de n, de $-\infty$ à $+\infty$, zéro compris.

Cette fonction est paire. Elle a pour pôles doubles tous les points $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; la partie principale relative au pôle $x = n$ est $\frac{1}{(x-n)^2}$.

Périodicité des fonctions

$$S(x), \quad C(x) \quad \text{et} \quad p(x) = -\frac{dC(x)}{dx}.$$

Ce que nous venons de dire met en évidence la pério-

dicité des fonctions que nous venons d'introduire $S(x)$, $C(x)$ et $p(x)$.

Tout d'abord le développement (3) de $p(x)$ montre immédiatement que cette fonction ne change pas quand on ajoute 1 à x, car cela ne fait que déplacer les termes du second membre : de l'égalité

$$(4) \qquad p(x+1) = p(x)$$

on déduit, par intégration,

$$C(x+1) = C(x) + h,$$

h étant une constante. Si l'on fait $x = -\frac{1}{2}$,

$$C(\tfrac{1}{2}) = C(-\tfrac{1}{2}) + h = 0,$$

et, comme $C(x)$ est impaire, $h = 0$. Donc $C(x)$ admet aussi 1 pour période. On aurait pu le démontrer directement en formant la différence $C(x+1) - C(x)$.

Intégrons encore les deux membres de la relation

$$(5) \qquad C(x+1) = C(x),$$

on a

$$\log S(x+1) = \log S(x) + \log k,$$

où k est une constante.

D'où

$$S(x+1) = k S(x);$$

faisons $x = -\frac{1}{2}$, il vient

$$S(\tfrac{1}{2}) = k S(-\tfrac{1}{2}) = -k S(\tfrac{1}{2}),$$

d'où $k = -1$. On a donc la formule

$$(6) \qquad S(x+1) = -S(x),$$

de laquelle on tire

$$(7) \qquad S(x+2) = -S(x+1) = S(x)$$

La fonction $S(x)$ admet donc le nombre 2 comme période.

D'ailleurs, elle n'admet pas d'autre période que le nombre 2 et ses multiples entiers. En effet, $S(x)$ ne peut admettre comme période un nombre impair $2n+1$; on a, en effet, puisque 2 et $2n$ sont des périodes,

$$S(x+2n+1) = S(x+1) = -S(x).$$

Mais un nombre qui ne serait pas entier ne peut être une période; en effet, puisque la fonction $S(x)$ s'annule pour $x=0$, elle doit s'annuler pour toute période; or elle ne s'annule que pour des valeurs entières de x.

On a donc les relations

$$(6') \qquad S(x+2n) = S(x),$$

$$(7') \qquad S(x+2n+1) = -S(x);$$

d'où, en dérivant,

$$(6'') \qquad S'(x+2n) = S'(x).$$

$$(7'') \qquad S'(x+2n+1) = -S'(x).$$

On ne peut pas avoir

$$S'(x+k) = S'(x),$$

si k n'est pas un nombre pair. En effet, on déduirait de cette relation

$$S(x+k) = S(x)+h$$

et, en changeant x en $x+1$,

$$-S(x+k) = -S(x)+h.$$

ce qui entraîne $h=0$. et, par suite, k est une période de $S(x)$.

Pareillement, on montrerait que, si l'on a

$$S'(x+k) = -S'(x),$$

k est un nombre impair.

Les formules (6'), (7'), (6''), (7'') montrent que la seule période de $C(x)$ est le nombre 1.

De même, la seule période de $p(x)$ est 1 ; soit, en effet, un nombre k tel que

$$p(x+k) = p(x), \qquad \text{d'où} \qquad C(x+k) = C(x) + h,$$

h étant une constante.

Si l'on fait $x = -k$, le premier membre de cette dernière égalité devient infini ; par suite aussi, $C(k)$, et le nombre k ne peut être qu'un entier.

II. Formule d'addition de $C(x)$. — Établissons maintenant la formule d'addition pour $C(x)$: la manière même dont nous l'établirons nous montrera qu'elle est algébrique.

A cet effet, commençons par montrer qu'il existe une relation algébrique entre $p(x)$ et $C(x)$. Nous allons suivre pour cela une analyse d'Eisenstein (*Journal de Crelle*, t. 135, p. 191).

Posons, avec l'éminent géomètre allemand,

$$C(x) = \frac{1}{x} + \sum_n{}' \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) = (1, x),$$

ou encore

$$(1, x) = \sum_n \frac{1}{x-n},$$

l'entier n prenant successivement les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; de même, soit encore

$$(2, x) = p(x) = \sum_n \frac{1}{(x+n)^2},$$

$$(3, x) = \sum_n \frac{1}{(x-n)^3} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(2, x) = \frac{1}{2}\frac{d^2 C(x)}{dx^2},$$

$$(4, x) = \sum_n \frac{1}{(x-n)^4} = -\frac{1}{3}\frac{d}{dx}(3, x) = -\frac{1}{6}\frac{d^3 C(x)}{dx^3},$$

. . . .

Considérons l'identité élémentaire

$$(8)\qquad \frac{1}{p^2}\,\frac{1}{q^2} = \frac{1}{(p+q)^2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right) + \frac{2}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right).$$

Si l'on y fait

$$p = x - n, \qquad q = -x + m,$$

elle devient

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{(x-n)^2}\,\frac{1}{(x-m)^2} = \frac{1}{(n-m)^2}&\left[\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x-m)^2}\right] \\ &- \frac{2}{(n-m)^3}\left(\frac{1}{x-n} - \frac{1}{x-m}\right), \end{aligned}\right.$$

cette identité est vraie, quels que soient les entiers m et n, pourvu que $m \neq n$.

Étendons alors l'identité (9) à toutes les valeurs entières, positives ou négatives, de m et n, en supposant toutefois $m \neq n$. En sommant d'abord le premier membre et laissant n fixe, on a

$$\frac{1}{(x-n)^2}\left[\sum_m \frac{1}{(x-m)^2} - \frac{1}{(x-n)^2}\right]$$

ou bien

$$\frac{1}{(x-n)^2}\left[(2, x) - \frac{1}{(x-n)^2}\right] = \frac{1}{(x-n)^2}(2, x) - \frac{1}{(x-n)^4}.$$

Si l'on somme relativement à n, il vient

$$(2, x)\sum_n \frac{1}{(x-n)^2} - \sum_n \frac{1}{(x-n)^4} = (2, x)^2 - (4, x).$$

Calculons maintenant le second membre : à cet effet, posons $n - m = m'$ $(m' \neq 0)$, il vient

$$\frac{1}{m'^2}\left[\frac{1}{(x-m)^2} + \frac{1}{(x-m-m')^2}\right] - \frac{2}{m'^3}\left(\frac{1}{x-m-m'} - \frac{1}{x-m}\right);$$

laissant d'abord m' fixe et sommant par rapport à m, il vient

$$\frac{1}{m'^2}\left[(2,x)-(2,x)\right]-\frac{2}{m'^3}\left[(1,x)-(1,x)\right]=\frac{2}{m'^2}(2,x);$$

enfin, étendant la somme à toutes les valeurs de m', sauf $m'=0$, et posant

$$\sum_n{}' \frac{1}{m'^2}=s_1 \qquad (m'\neq 0),$$

il vient

$$(10) \qquad (2,x)^2-(4,x)=2s_1(2,x).$$

Reprenons l'identité (8) et posons

$$p=x+m, \qquad q=n,$$

il vient

$$(10') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{(x+m)^2}\,\frac{1}{n^2}=\frac{1}{(x+m')^2}&\left[\frac{1}{(x+m'-n)^2}+\frac{1}{n^2}\right] \\ &+\frac{2}{(x+m')^3}\left(\frac{1}{x+m'-n}+\frac{1}{n}\right), \end{aligned} \right.$$

en remplaçant $m+n$ par m' dans le second membre. Comme plus haut, étendons l'identité (10') à toutes les valeurs entières, positives ou négatives de m et n (sauf toutefois pour $x=0$; m seul peut être nul) : le premier membre donne

$$s_1(2,x);$$

quant au second membre, en supposant d'abord m' fixe, il donne

$$\frac{1}{(x+m')^2}\left[(2,x)-\frac{1}{(x+m')^2}+s_1\right]$$
$$+\frac{2}{(x+m')^3}\left[(1,x)-\frac{1}{x+m'}\right].$$

Dans la dernière parenthèse $\left(\sum_n{}'\frac{1}{x+m'-n}+\sum_n{}'\frac{1}{n}\right)$, la somme $\sum_n{}'\frac{1}{n}$ est nulle.

Enfin, en donnant à m' toutes les valeurs entières, on a

$$(2, x)^2 - (4, x) + s_1(2, x) + 2(1, x)(3, x) - 2(4, x);$$

d'où

$$s_1(2, x) = (2, x)^2 - (4x) + s_1(2, x) + 2(1, x)(3, x) - 2(4, x),$$

c'est-à-dire

(11) $$3(4, x) = (2, x)^2 + 2(1, x)(3, x).$$

Les relations (10) et (11) peuvent s'écrire

(10') $$\left(\frac{dC}{dx}\right)^2 = -\frac{1}{6}\frac{d^3C}{dx^3} - 2s_1\frac{dC}{dx},$$

(11') $$-\frac{1}{2}\frac{d^3C}{dx^3} = \left(\frac{dC}{dx}\right)^2 + C\frac{d^2C}{dx^2}.$$

Éliminons $\frac{d^3C}{dx^3}$ entre (10') et (11'), nous obtenons

(10'') $$2\left(\frac{dC}{dx}\right)^2 - 6s_1\frac{dC}{dx} - C\frac{d^2C}{dx^2} = 0;$$

dérivons (10'),

(11'') $$3\frac{dC}{dx}\frac{d^2C}{dx^2} - 6s_1\frac{d^2C}{dx^2} - C\frac{d^3C}{dx^3} = 0.$$

Éliminons $\frac{d^2C}{dx^2}$ et $\frac{d^3C}{dx^3}$ entre les relations (10''), (11'') et (10'), on obtient finalement l'équation entre C et $\frac{dC}{dx}$,

(12) $$\frac{dC}{dx} = -(3s_1 + C^2).$$

Déduisons maintenant de la relation (12) la formule d'addition pour $C(x)$.

D'après les notations déjà posées, on a, pour toutes les valeurs entières, positives, nulles ou négatives de m,

$$\sum_m \left(\frac{1}{x + m} - \frac{1}{y - m}\right) = (1, x) - (1, y).$$

d'où

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \left(\frac{1}{x+m} - \frac{1}{y+m} \right) \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{y+n} \right) \\ &\quad = [(1, x) - (1, y)]^2. \end{aligned} \right.$$

Calculons le premier membre de la relation (13) en le développant : on peut écrire le terme général

$$\frac{1}{(x+m)(x+n)} + \frac{1}{(y+m)(y+n)} - \frac{1}{(x+m)(y+n)} - \frac{1}{(y+m)(x+n)}.$$

Or, tant que $m \neq n$, on a identiquement

$$\frac{1}{(x+m)(x+n)} + \frac{1}{(y+n)(y+n)} = \frac{1}{m-n} \left(- \frac{1}{x+m} + \frac{1}{x+n} - \frac{1}{y+m} + \frac{1}{y+n} \right).$$

Donc la valeur du premier membre de cette dernière égalité, quand on donne à m et n toutes les valeurs entières, est égale à celle qu'il prend pour $m = n$ augmentée de la valeur du second membre ; or, le second membre est nul après la sommation, donc on a

$$\begin{aligned} &\sum_{m,n} \left(\frac{1}{(x+m)(x+n)} + \frac{1}{(y+m)(y+n)} \right) \\ &\quad = \sum_{m} \left(\frac{1}{(x+m)^2} + \frac{1}{(y+m)^2} \right) \\ &\quad = (2, x) + (2, y). \end{aligned}$$

De même

$$- \frac{1}{(x+m)(y+n)} = \frac{1}{x-y+m-n} \left(\frac{1}{x+m} - \frac{1}{y+n} \right),$$

$$- \frac{1}{(y+m)(x+n)} = \frac{1}{y-x+m-n} \left(\frac{1}{y+m} - \frac{1}{x+n} \right).$$

Ces dernières identités ont toujours lieu quels que soient

m et n. Pour effectuer les sommations, posons

$$m - n = m',$$

d'où $m = m' + n$, et laissant d'abord m' fixe, il vient

$$\sum \frac{1}{x - y - m'} \left(\frac{1}{x - m' - n} - \frac{1}{y + n} \right)$$
$$= \frac{1}{x - y + m'} \left(\sum_n \frac{1}{x - m' + n} - \sum_n \frac{1}{j - n} \right)$$
$$= \frac{1}{x - y + m'} [(1, x) - (1, y)].$$

Si nous faisons varier m', on a

$$(1, x - y)[(1, x) - (1, y)],$$

de même

$$\sum \frac{1}{y - x + m'} \left(\frac{1}{y + m' + n} - \frac{1}{x + n} \right)$$
$$= (1, y - z)[(1, y) - (1, x)],$$

d'où la relation

$$[(1, x) - (1, y)]^2 = (2, x) - (2, y)$$
$$+ (1, x - y)[(1, x) - (1, y)] + (1, y - x)[(1, y) - (1, x)],$$

c'est-à-dire

$$[(1, x) - (1, y)]^2 = (2, x) + (2, y) - 2(1, x - y)[(1, x) - (1, y)].$$

En changeant y en $-y$ dans cette égalité et remarquant que

$$(2, y) = (2, -y), \qquad (1, y) = -(1, -y),$$

il vient

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2(1, x - y)[(1, x) + (1, y)] \\ \qquad = [(1, x) + (1, y)]^2 - (2, x) - (2, y); \end{array} \right.$$

or, d'après (12),

$$(2, x) = (1, x)^2 - 3 s_1, \qquad (2, y) = (1, y)^2 - 3 s_1;$$

donc (14) s'écrit, après réductions faites,

$$(1, x + y) = \frac{(1, x)(1, y) - 3 s_1}{(1, x) + (1, y)},$$

c'est-à-dire

$$(15) \qquad C(x + y) = \frac{C(x) C(y) - 3 s_1}{C(x) + C(y)};$$

c'est la formule que nous voulions établir.

La méthode suivie pour arriver à la formule (15) est peut-être un peu longue, mais elle a l'avantage d'être élémentaire et de ne faire appel qu'à la définition de $C(x)$ et à la relation (12).

Formule d'addition pour $S(x)$.

Passons maintenant aux formules analogues pour $S(x)$; on a

$$\frac{dC}{dx} = \frac{S''S - S'^2}{S^2} = \frac{S''}{S} - \left(\frac{S'}{S}\right)^2 = \frac{S''}{S} - C^2,$$

et d'après (12) il en résulte

$$\frac{S''}{S} = -3 s_1$$

ou

$$(16) \qquad S'' + 3 s_1 S = 0.$$

Multiplions les deux membres de (16) par $2S'$ et intégrons

$$(17) \qquad S'^2 + 3 s_1 S^2 = h,$$

h étant une constante; pour déterminer h calculons la valeur de $S'(x)$ pour $x = 0$. Développons $C(x)$ en série de puissances : on a, pour x inférieur à n en valeur absolue,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{n} \quad - \frac{1}{n} \quad \frac{x}{n^2} - \frac{x^2}{n^3} \quad \cdots$$

d'où, en portant cette valeur dans la formule (2),

$$(18) \qquad C(x) = \frac{1}{x} - s_1 x - s_2 x^3 - s_3 x^5 - \ldots;$$

on a posé

$$\sum_n{}' \frac{1}{n^2} = s_1, \qquad \sum_n{}' \frac{1}{n^4} = s_2, \qquad \sum_n{}' \frac{1}{n^6} = s_3, \quad \ldots;$$

les sommes $\sum\limits_n{}' \dfrac{1}{n^{2k+1}}$ sont nulles.

De là on déduit

$$S(x) = A x e^{-s_1 \frac{x^2}{2} - s_2 \frac{x^4}{4} - \ldots},$$

A étant une constante. Or $A = 1$ puisque $\lim \dfrac{S(x)}{x} = 1$ pour $x = 0$, par suite

$$S(x) = x\left(1 + \frac{-s_1 \frac{x^2}{2} - S_2 \frac{x^4}{4} - \ldots}{1} + \ldots\right),$$

en se bornant aux deux premiers termes du développement de $S(x)$, il vient

$$(19) \qquad S(x) = x\left(1 - s_1 \frac{x^2}{2} - \ldots\right) = x - s_1 \frac{x^3}{2} - \ldots,$$

d'où

$$(20) \qquad S'(x) = 1 - 3 s_1 \frac{x^2}{2} + \ldots$$

et enfin si $x = 0$, on a

$$S'(0) = 1.$$

D'ailleurs, nous établirons tout à l'heure et d'une manière plus simple ces développements (19) et (20). Pour le moment revenons à la relation (17) qui s'écrit

$$(21) \qquad S'^2 + 3 s_1 S^2 = 1.$$

De la formule d'addition de $C(x)$, on déduit

(22) $$\frac{S'(x+y)}{S(x+y)} = \frac{S'(x)S'(y) - 3s_1 S(x)S(y)}{S'(x)S(y) + S'(y)S(x)};$$

ou bien, d'après la formule (21),

$$S^2(x+y) = \frac{[S'(x)S(y) + S'(y)S(x)]^2}{\left\{ \begin{array}{l} 3s_1[S'(x)S(y) + S'(y)S(x)]^2 \\ \quad + [S'(x)S'(y) - 3s_1 S(x)S(y)]^2 \end{array} \right\}}.$$

Or le dénominateur est égal à 1, en appliquant encore la formule (21), et comme pour $y = 0$ le numérateur se réduit à $\pm S(x)$, la formule d'addition pour $S(x)$ est donc

(23) $$S(x+y) = S'(x)S(y) + S'(y)S(x).$$

D'après l'expression (22) on conclut aussi

(24) $$S'(x+y) = S'(x)S'(y) - 3s_1 S(x)S(y).$$

Remarque I. — Des relations

$$\left\{ \begin{array}{l} p(x) = 3s_1 + C^2, \\ S''(x) = -3s_1 S(x), \end{array} \right.$$

on déduit

(25) $$p(x) = \frac{S'^2 - S''S}{S^2} = \frac{S^2(x)}{1},$$

et par suite

(25') $$C^2(x) = \frac{1 - 3s_1 S^2(x)}{S^2(x)}.$$

Remarque II. — L'équation (12) permet de calculer les sommes s_2, s_3 . . . , de proche en proche en fonction de la première s_1. En effet l'équation (12) peut s'écrire

$$\left(\frac{1}{x} \quad s_1 x - s_2 x^3 - \ldots - s_n x^{2n-1} - \ldots\right)^2$$
$$= \frac{1}{x^2} - 2s_1 + 3s_2 x^2 + \ldots + (2n-1)s_n x^{2n-2} + \ldots;$$

égalant les coefficients de x^{2n-2} et supposant successi-

vement n pair ou impair ($n = 2\mu$ ou $n = 2\mu + 1$), on obtient

$$
\begin{aligned}
(4\mu + 1)\mathrm{S}_{2\mu} &= 2\mathrm{S}_1\mathrm{S}_{2\mu-1} + 2\mathrm{S}_2\mathrm{S}_{2\mu-2} + \ldots \\
&\quad + 2\mathrm{S}_{\mu-1}\mathrm{S}_{\mu+1} - \mathrm{S}^2_{\mu}, \\
(4\mu + 3)\mathrm{S}_{2\mu+1} &= 2\mathrm{S}_1\mathrm{S}_{2\mu} + 2\mathrm{S}_2\mathrm{S}_{2\mu-1} + \ldots \\
&\quad + 2\mathrm{S}_{\mu}\mathrm{S}_{\mu+1}.
\end{aligned}
$$

Ainsi on a

$$s_2 = \frac{s_1^2}{5}, \qquad s_3 = \frac{2s_1^3}{5.7}, \qquad s_4 = \frac{11 s_1^4}{5.7.9}, \qquad s_5 = \frac{146 s_1^5}{5^2.7.9.11}, \quad \ldots.$$

Développement de $\mathrm{S}(x)$ *et de* $\mathrm{S}'(x)$ *en série de puissances.* — De la formule

$$(21) \qquad \mathrm{S}'^2(x) + 3s_1\mathrm{S}^2(x) = 1$$

nous allons déduire le développement de $\mathrm{S}(x)$ en série de puissances par la formule de Mac-Laurin; on déduit aisément

$$\mathrm{S}_0^{(2n)} = 0, \qquad \mathrm{S}_0^{(2n+1)} = (-1)^n(3s_1)^n,$$

d'où

$$(26) \quad \mathrm{S}(x) = \frac{1}{x} - 3s_1\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + (-1)^n(3s_1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

développement valable quel que soit x; on en déduit

$$(27) \quad \mathrm{S}'(x) = 1 - 3s_1\frac{x^2}{1.2} + \ldots + (-1)^n(3s_1)^n\frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots.$$

Multiplions l'équation (26) par $i\sqrt{3s_1}$ et ajoutons à (27), il vient

$$\mathrm{S}'(x) - i\sqrt{3s_1}\,\mathrm{S}(x) = 1 + \frac{ix\sqrt{3s_1}}{1} - \frac{(x\sqrt{3s_1})^2}{1.2} - i\frac{(x\sqrt{3s_1})^3}{1.2.3} + \ldots,$$

ou bien

$$(28) \qquad \mathrm{S}'(x) - i\sqrt{3s_1}\,\mathrm{S}(x) = e^{ix\sqrt{3s_1}};$$

telle est la relation d'Euler; on en déduit facilement

$$(29)\qquad S'(x) = \frac{e^{ix\sqrt{3s_1}} + e^{-ix\sqrt{3s_1}}}{2},$$

$$(30)\qquad S(x) = \frac{e^{ix\sqrt{3s_1}} - e^{-ix\sqrt{3s_1}}}{2i\sqrt{3s_1}},$$

$$(31)\qquad C(x) = i\sqrt{3s_1}\,\frac{e^{ix\sqrt{3s_1}} + e^{-ix\sqrt{3s_1}}}{e^{ix\sqrt{3s_1}} - e^{-ix\sqrt{3s_1}}}.$$

De la relation (28) on tire, puisque $S(x)$ et $S'(x)$ changent de signe quand on remplace x par $x+1$,

$$(32)\qquad e^{i\sqrt{3s_1}} + 1 = 0,$$

et la fonction e^z admet $2i\sqrt{3s_1}$ pour période.

Pour simplifier, on voit que nous sommes conduits à poser $\sqrt{3s_1} = \pi$: ainsi se trouve introduit naturellement le nombre π que nous pourrions nous proposer de calculer et qui peut être regardé comme la plus petite racine positive de l'équation

$$e^{ix} + 1 = 0.$$

Remarque I. — Des équations (29), (30) et (31) on pourrait déduire les formules d'addition de $S'(x)$, $S(x)$ et $C(x)$, en admettant la relation (12), déjà démontrée, et aussi l'égalité

$$e^x e^y = e^{x+y},$$

ce qui ne serait pas contradictoire, vu que cette propriété de l'exponentielle est indépendante des fonctions circulaires.

Remarque II. — Pour que la constante $3s_1$ ne figure pas explicitement dans les formules déjà trouvées on peut poser

$$S(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi},$$

$$S'(x) = \frac{d}{dx} S(x) = \cos \pi x, \qquad \text{et} \qquad C(x) = \pi \cot \pi x.$$

enfin remplacer πx par x. On retombe ainsi sur les notations ordinaires des fonctions que nous étudions; mais il est inutile de faire un tel changement, vu qu'il n'offre pas un grand intérêt.

ÉTUDE DES ÉQUATIONS

$$S(x) = S(x_0), \qquad C(x) = C(x_0).$$

De la formule d'addition pour $S(x)$ on déduit

$$S(x + x_0) + S(x - x_0) = 2S(x)S'(x_0)$$

ou bien si

$$x + x_0 = u, \qquad x - x_0 = v,$$

$$(33) \qquad S(u) + S(v) = 2S\frac{u+v}{2}S'\frac{u-v}{2};$$

de là

$$(34) \qquad S(u) - S(v) = 2S\frac{u-v}{2}S'\frac{u+v}{2}.$$

Si, dans la relation

$$S(x + y) = S(x)S'(y) + S'(x)S(y)$$

on fait

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y = -x,$$

on déduit

$$S\left(\frac{1}{2} - x\right) = S\left(\frac{1}{2}\right)S'(x) - S'\left(\frac{1}{2}\right)S(x).$$

Or $S'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, et la relation $S'^2(x) + \pi^2 S^2(x) = 1$ donne

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{1}{\pi}.$$

Nous prenons le signe $+$, vu que, d'après la formule fondamentale (1), $S(x)$ est positif pour $x = \frac{1}{2}$: d'où

$$(35) \qquad S\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{S'(x)}{\pi},$$

de même

$$(36) \qquad S(x) = \frac{S'\left(\frac{1}{2} - x\right)}{\pi}.$$

Cela posé, considérons l'équation

$$Sx - Sx_0 = 0.$$

D'après (34) on a

$$2S\frac{x - x_0}{2}S'\frac{x + x_0}{2} = 0,$$

ou bien

$$(37) \qquad 2\pi S\frac{x - x_0}{2}S\left(\frac{1}{2} - \frac{x + x_0}{2}\right) = 0.$$

Alors les solutions de l'équation (37) sont

$$x = x_0 + 2n,$$
$$x = -x_0 + 2n' + 1,$$

n et n' étant deux entiers arbitraires.

Pour $S'(x)$ on a deux formules analogues à (33) et à (34)

$$S'(u) + S'(v) = 2S'\frac{u + v}{2}S'\frac{u - v}{2},$$

$$S'(u) - S'(v) = -2\pi^2 S\frac{u + v}{2}S\frac{u - v}{2}.$$

De là on déduit les solutions de l'équation $S'(x) = S'(x_0)$, qui sont

$$x = 2n \pm x_0.$$

Passons enfin à l'équation

$$C(x) = C(x_0):$$

on a

$$C(x) + C(x_0) = \frac{S(x + x_0)}{S(x)S(x_0)},$$

d'où

$$C(x) - C(x_0) = \frac{S(x_0 - x)}{S(x)S(x_0)}.$$

Les solutions de l'équation proposée sont donc celles de $S(x_0 - x) = 0$. D'où

$$x = x_0 + n.$$

En particulier, si $x_0 = \frac{1}{2}$, les fonctions $S'(x)$ et $C(x)$ s'annulent pour les mêmes valeurs $x = n + \frac{1}{2}$.

L'étude des équations précédentes nous permettrait d'aborder maintenant les fonctions inverses des fonctions que nous venons de considérer.

De même la relation d'Euler (28) conduit pour m entier à la formule de Moivre ; on a, en effet,

$$[S'(x) + i\pi S(x)]^m = e^{i\pi m x},$$

d'où

$$[S'(x) + i\pi S(x)]^m = S'(mx) + i\pi S(mx).$$

De là on peut déduire les expressions de $S(mx)$ et $S'(mx)$ en fonction des puissances successives de $S(x)$ et $S'(x)$ et pareillement celles de $S^m(x)$ et $S'(mx)$ à l'aide des fonctions S et S' des multiples de la variable x. Enfin, étant donnée la valeur de $S(x)$ ou $S'(x)$, on peut étudier les équations qui donnent $S\left(\frac{x}{m}\right)$ et $S'\left(\frac{x}{m}\right)$. Ces questions sont maintenant faciles à aborder et nous ne nous y arrêterons pas. De même, en imitant les procédés classiques, on peut suivre les variations des fonctions $S(x)$, $S'(x)$ et $C(x)$ quand la variable est réelle et comprise entre 0 et 2 ou 0 et 1.

Enfin on peut introduire et étudier les trois nouvelles fonctions

$$\operatorname{tang}(x) = \frac{1}{C(x)} = \frac{S(x)}{S'(x)},$$

$$\operatorname{séc}(x) = \frac{1}{S'(x)},$$

$$\operatorname{coséc}(x) = \frac{1}{S(x)}.$$

FONCTIONS CIRCULAIRES EN GÉNÉRAL.

Terminons cette étude rapide par la démonstration des formules qui permettent d'exprimer une fonction circulaire quelconque, et par l'examen de deux de leurs propriétés essentielles.

Nous appellerons *fonction circulaire* ou *trigonométrique* une fonction $f(x)$ rationnelle en $C(x)$ ou en $S(2x)$ et $S'(2x)$.

(On a, en effet,

$$S(2x) = \frac{2C(x)}{\pi^2 + C^2(x)}, \qquad S'(2x) = \frac{C^2(x) - \pi^2}{C^2(x) + \pi^2};$$

ces formules découlent de celles-ci

$$S(2x) = 2S(x)S'(x),$$
$$S'(2x) = 2S'^2(x) - 1 = 1 - 2\pi^2 S^2(x),$$

lesquelles proviennent elles-mêmes des formules d'addition.)

Une fonction circulaire ainsi définie est uniforme; elle n'a d'autres points singuliers à distance finie que des pôles; elle admet pour périodes le nombre 1 et ses multiples entiers. On dit que 1 est une période primitive.

Toute fonction circulaire peut se mettre sous deux formes remarquables rappelant la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, et la mise en évidence des zéros et des pôles de ces fonctions.

1° *Formule de décomposition en éléments simples.* — Soit $f[C(x)]$ une fonction circulaire quelconque, f étant rationnelle. Posons $e^{i\pi x} = z$. De la relation (3) il résulte

$$C(x) = i\pi \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}.$$

de sorte qu'on a

$$f[C(x)] = \frac{F_1(z^2)}{F(z^2)},$$

F et F_1 étant des polynomes entiers en z^2.

Cela posé, décomposons $\frac{F_1}{F}$ en fractions simples et considérons l'une d'elles $\frac{A_k}{(z^2-a)^k}$; posons $a = e^{2i\pi\alpha}$, égalité toujours possible sauf pour $a = 0$; on a

$$\frac{1}{z^2 - a} = \frac{1}{e^{2i\pi x} - e^{2i\pi\alpha}} = \frac{e^{-2i\pi\alpha}}{2}\left[-1 - \frac{i}{\pi} C(x-\alpha)\right].$$

De sorte que la somme

$$\frac{A_1}{z^2-a} + \frac{A_2}{(z^2-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(z^2-a)^n}$$

devient un polynome de degré n en $C(x-\alpha)$; mais la relation

(12) $$\frac{dC}{dx} = -(\pi^2 + C^2),$$

dérivée n fois, permet d'exprimer linéairement les puissances successives de $C(x-\alpha)$ au moyen des dérivées successives de $C(x-\alpha)$ jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$. On a donc

$$\sum \frac{A_k}{(z^2-a)^k} = H + MC(x-\alpha)$$
$$+ M_1 \frac{d}{dx} C(x-\alpha) + \ldots + M_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} C(x-\alpha),$$

les constantes H, M, M_1, ... dépendant linéairement des A.

En répétant pour les diverses racines de $F(z^2)$ ce que nous venons de dire pour la racine a, réunissant la partie entière de $\frac{F_1(z^2)}{F(z^2)}$ avec les fractions de la forme

$\frac{1}{z^{2k}}$ et appelant $E(z^2)$ cet ensemble, on a

$$\frac{F_1(z^2)}{F(z^2)}E(z^2)+\sum M\,C(x-\alpha)$$
$$+\sum M_1\frac{d}{dx}C(x-\alpha)+\ldots+\sum M_h\frac{d^h}{dx^h}C(x-\alpha).$$

(h est le plus grand des nombres tels que n et certains coefficients M_h peuvent être nuls.) $E(z^2)$ est de la forme

$$\Sigma\, a_k e^{2ik\pi x},$$

où k peut être un nombre entier, positif ou négatif.

C'est là l'expression générale de toute fonction circulaire.

2° *Forme d'un quotient de deux produits de fonctions* S. — On peut écrire

$$f[C(x)]=\frac{[C(x)-a_1][C(x)-a_2]\ldots[C(x)-a_n]}{[C(x)-b_1]\ldots[C(x)-b_p]}.$$

Posons

$$a_k=C(x_k)\qquad\text{et}\qquad b_k=C(x'_k),$$

on a

$$C(x)-C(x_k)=\frac{S(x_k-x)}{S x\, S x_k},$$

d'où

$$f[C(x)]=M(Sx)^m\frac{S(x-x_1)\ldots S(x-x_n)}{S(x-x'_1)\ldots S(x-x'_p)}.$$

Quelques quantités x_k ou x'_k peuvent être égales entre elles.

M est une constante et $m=p-n$.

C'est la seconde formule annoncée mettant en évidence les zéros et les pôles de la fonction considérée.

Remarque. — Les fonctions précédentes $f(x)$ admettent la période 1; par un changement linéaire de variable on peut faire en sorte qu'elles admettent une

période quelconque 2ω : il suffit de poser

$$x = \frac{x'}{2\omega} \qquad \text{et} \qquad f_1(x') = f(x) = f\left(\frac{x'}{2\omega}\right);$$

on a alors

$$f_1(x' + 2\omega) = f_1(x').$$

Signalons maintenant les deux propriétés essentielles d'une fonction circulaire qui font l'objet des théorèmes suivants :

Théorème I. — *Entre deux fonctions circulaires aux mêmes périodes* $y = f(x)$, $z = f_1(x)$ *a lieu une relation algébrique.*

Il suffit de démontrer le théorème dans le cas où la période commune est 1 : alors y et z sont des fonctions rationnelles de $C(x)$ et l'élimination de $C(x)$ donne une relation algébrique entre y et z; cette relation définit une courbe unicursale.

Les formules (12), (21), (25), (25') sont des cas particuliers de ce théorème.

Théorème II. — *Une fonction circulaire* $f(x)$ *admet un théorème d'addition algébrique.*

Démontrons encore ce résultat pour le cas où $f(x)$ admet la période 1 : il est facile de passer au cas d'une période quelconque.

Posons

$$f(x) = F[C(x)] = u,$$
$$f(y) = F[C(y)] = v,$$
$$f(x+y) = F[C(x+y)] = w;$$

on a de plus

$$C(x+y) = \frac{C(x)C(y) - \pi^2}{C(x) + C(y)}.$$

Comme F est rationnelle en C, l'élimination de

$C(x)$, $C(y)$ et $C(x+y)$, entre les quatre relations précédentes, conduit à une équation algébrique entre u, v et w.

[D3b]

EXTENSION DU THÉORÈME DE CAUCHY AUX FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE DE LA FORME $\rho e^{ic^{\mathrm{IA}}\alpha}$;

Par M. L. RAVUT.

Cauchy a démontré le premier, dans le cas d'une variable complexe de la forme $\rho e^{i\alpha}$, le théorème suivant qui porte son nom :

Si $f(z)$ est une fonction de la variable complexe $z = \rho e^{i\alpha}$, uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire S, l'intégrale

$$\int_S f(z)\,dz,$$

prise le long du contour de cette aire, est nulle.

On peut étendre ce théorème aux courbes fermées de l'espace, situées sur des surfaces coniques ayant pour sommet l'origine des coordonnées ou situées sur des plans renfermant cette origine.

Dans ce cas, la variable complexe z est égale à $\rho e^{ic^{\mathrm{IA}}\alpha}$, c'est-à-dire à $\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha\cos A + i\mathrm{I}\sin\alpha\sin A)$. ρ est le module de z; l'angle α représente le déplacement de ρ dans le plan et l'angle A le déplacement du plan lui-même. Les symboles d'opérations i, I satisfont d'ailleurs aux relations

$$i^2 = -1, \qquad \mathrm{I}^2 = -1, \qquad i\mathrm{I} = -\mathrm{I}i.$$

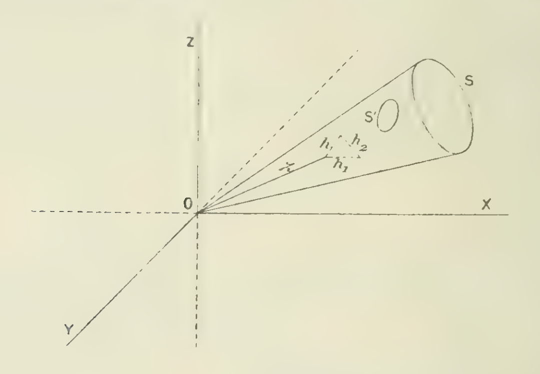
Si l'on a $A =$ constante ou $= 0$, ρ et α étant variables, z se meut dans un même plan.

Théorème de Cauchy généralisé. — *Si $f(z)$ est une fonction de la variable complexe $z = \rho e^{ie^{i\lambda}\alpha}$, uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire de la surface conique OS ou de la surface S' faisant partie de OS, les intégrales*

$$\int_S f(z)\,dz, \qquad \int_{S'} f(z)\,dz,$$

prises le long des contours, S, S' *seront nulles.*

Pour démontrer ce théorème, considérons un triangle infinitésimal ayant pour sommet l'extrémité de z et pour



côtés les vecteurs h, h_1 et h_2. Nous avons

$$h = h_1 + h_2.$$

Il en résulte que l'on a identiquement

$$(1) \qquad f(z-h)h - f(z+h)h_1 - f(z-h)h_2 = 0.$$

Toutes les fois que le premier membre de cette identité interviendra comme élément dans une limite de somme, on pourra, en négligeant les infiniment petits d'ordres supérieurs au premier, lui substituer l'une ou

l'autre des expressions suivantes :

$$(2)\qquad f(z)h - f(z)h_1 - f(z + h_1)h_2,$$

$$(3)\qquad f(z + h)h - f(z + h_1)h_1 - f(z + h)h_2,$$

et cela sans changer le résultat final.

Les expressions (2) et (3) nous montrent que, lorsqu'on multiplie la fonction $f(z)$ par l'accroissement de la variable, on peut, dans la substitution que nous avons en vue, prendre indifféremment pour valeur de z dans $f(z)$ sa valeur initiale ou sa valeur finale.

Cela étant, je dis que l'on aura

$$\int_S f(z)\,dz = 0.$$

Pour l'établir, coupons la surface OS à l'aide de surfaces sphériques infiniment voisines ayant pour centre commun le point O, et traçons sur elle des rayons vecteurs infiniment rapprochés. En joignant deux à deux par des droites les points de rencontre consécutifs, nous formerons un certain nombre de polygones élémentaires, que nous pourrons décomposer en triangles.

Si l'on applique l'identité (1) à chacun de ces triangles, en les parcourant tous dans le sens direct, on aura identiquement

$$\Sigma\,[f(z + h)h - f(z + h)h_1 - f(z - h)h_2] = 0.$$

Mais comme l'on peut, sans altérer la limite de la somme, substituer à un produit, tel que $f(z + h)h$, le produit $f(z)h$, tous les produits correspondant aux lignes intérieures se détruiront deux à deux; car, si dans un triangle l'on a le produit $f(z)h$, dans l'un des triangles contigus l'on aura le produit $-f(z + h)h$, auquel on pourra substituer le produit $-f(z)h$. Il ne restera donc que les produits se rapportant au contour. Par suite, l'on aura

$$\int_S f(z)\,dz = 0.$$

[D6b]

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA FONCTION arc tang z;

PAR M. MAILLARD.

Soit

$$w = \text{arc tang}\, z.$$

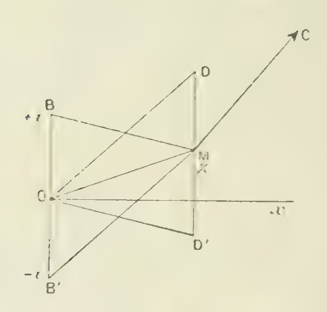
$$w' = \frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right).$$

Intégrant

$$w = \frac{i}{2}\, l\, \frac{z+i}{z-i} + C;$$

mais on a

$$l\, \frac{z+i}{z-i} = l \bmod \frac{z+i}{z-i} + i \arg \frac{z+i}{z-i} + 2k\pi i.$$



Prenons de part et d'autre de M, sur une perpendiculaire à Ox,

$$\text{MD} = \text{MD}' = 1,$$

$$\bmod \frac{z+i}{z-i} = \frac{\text{OD}}{\text{OD}'} = \frac{\text{MB}'}{\text{MB}},$$

$$\arg \frac{z+i}{z-i} = \widehat{\text{D}'\text{OD}} = \widehat{\text{BMB}'} = \pi - \widehat{\text{CMB}}.$$

$$w = \frac{i}{2}\, l\, \frac{\text{MB}'}{\text{MB}} - \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{\text{CMB}}}{2} + k\pi + C.$$

Faisant $z = 0$, nous trouvons $C = \frac{\pi}{2}$ et, finalement,

$$w = \frac{i}{2} l \frac{MB'}{MB} + \frac{\widehat{CMB}}{2} - k\pi.$$

Si, par exemple, z décrit un contour fermé, il suffira de calculer la variation de l'angle CMB pour en déduire celle de w.

[B1c]

SUR UN DÉTERMINANT REMARQUABLE;

PAR M. C. BOURLET.

On sait, depuis longtemps, que si dans une équation différentielle linéaire homogène, d'ordre m, on prend la dérivée logarithmique de la fonction comme nouvelle inconnue, on obtient une nouvelle équation différentielle d'ordre $(m-1)$, mais qui n'est plus linéaire. J'ai pu mettre cette équation sous forme d'un déterminant [1] et, en formant, en particulier, pour une équation linéaire à coefficients constants, on parvient à l'égalité intéressante que voici :

$$\begin{vmatrix} n!\,a_0 & (n-1)!\,a_1 & (n-2)!\,a_2 & \ldots & 2!\,a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -n & x & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(n-2) & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & \ldots\ldots\ldots & \ldots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= n!\,(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n).$$

---

(1) *Voir*, à ce sujet, mon récent Mémoire *Sur les operations en général, etc.* (*Annales de l'École Normale supérieure*, avril et mai 1897, p. 167).

Or, M. Laisant a signalé autrefois [1] l'exemple analogue suivant :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$
$$= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

auquel le précédent ne se ramène pas immédiatement. Ceci m'a amené naturellement à chercher à déterminer d'une façon générale tous les déterminants, du type précédent, tels que leur développement soit, à un facteur constant près, indépendant des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$, identique au polynome

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Soit donc le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_0^1 x - \beta_0^1 & \alpha_1^1 x - \beta_1^1 & \alpha_2^1 x - \beta_2^1 & \dots & \alpha_n^1 x - \beta_n^1 \\ \alpha_0^2 x - \beta_0^2 & \alpha_1^2 x - \beta_1^2 & \alpha_2^2 x - \beta_2^2 & \dots & \alpha_n^2 x - \beta_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0^n x - \beta_0^n & \alpha_1^n x - \beta_1^n & \alpha_2^n x - \beta_2^n & \dots & \alpha_n^n x - \beta_n^n \end{vmatrix}$$

et proposons-nous de déterminer, de la manière la plus générale, les coefficients α_i^k et β_i^k de façon que l'on ait, quels que soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ et x, l'identité

$$(1) \qquad D = \mu f(x),$$

μ étant différent de zéro et ne dépendant ni de x, ni

---

[1] *Voir* Laisant, *Sur un déterminant remarquable* (*Bull. de la Société math.*, t. XVII, p. 104); et encore, V. Gunther, *Ueber aufsteigende Kettenbrüche* (*Zeitschrift für Math. u. Phys.*, t. XXI, p. 187).

de a_0, a_1, ..., a_n. Multiplions, à cet effet, la première colonne de D par x^n, la seconde par x^{n-1}, la troisième par x^{n-2}, ... et ajoutons à la dernière. On aura

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & f(x) \\ \alpha_0^1 x + \beta_0^1 & \alpha_1^1 x + \beta_1^1 & \alpha_2^1 x + \beta_2^1 & \dots & \varphi_1(x) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ \alpha_0^n x + \beta_0^n & \alpha_1^n x + \beta_1^n & \alpha_2^n x + \beta_2^n & \dots & \varphi_n(x) \end{vmatrix},$$

en posant

$$\varphi_k(x) = (\alpha_0^k x + \beta_0^k) x^n + (\alpha_1^k x + \beta_1^k) x^{n-1} + \dots + \alpha_n^k x + \beta_n^k.$$

Développons D par rapport à la dernière colonne,

$$D = (-1)^n \Delta f(x) + A_1 \varphi_1(x) + \dots + A_n \varphi_n(x),$$

et l'identité (1) s'écrit

$$(2) \qquad A_1 \varphi_1(x) + \dots + A_n \varphi_n(x) = [\mu - (-1)^n \Delta] f(x).$$

Je dis que cette dernière identité ne peut avoir lieu, quels que soient x, a_0, a_1, ..., a_n, que si l'on a, séparément,

$$\varphi_1(x) = 0, \qquad \dots, \qquad \varphi_n(x) = 0, \qquad (-1)^n \Delta = \mu.$$

Il faut d'abord, en effet, que les deux membres de cette identité soient nuls; car, s'il n'en était pas ainsi, le second membre étant divisible par $f(x)$, le premier membre devrait l'être aussi, ce qui est impossible, puisqu'il ne contient pas a_n. Je dis, en second lieu, qu'on ne peut avoir, identiquement,

$$A_1 \varphi_1(x) + \dots + A_n \varphi_n(x) = 0,$$

quels que soient a_0, a_1, ..., a_{n-1}, que si tous les polynomes $\varphi_k(x)$ sont tous nuls. Égalons à zéro le coefficient de a_{i-1} dans ce développement, et nous aurons

$$(3) \qquad A_1^i \varphi_1(x) + A_2^i \varphi_2(x) + \dots + A_n^i \varphi_n(x) = 0$$
$$(\text{pour } i = 1, 2, \dots, n),$$

A_i^h désignant le coefficient de l'élément situé dans la $h^{\text{ième}}$ ligne et la $i^{\text{ème}}$ colonne dans le développement du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_0^1 x - \beta_0^1 & \ldots & \alpha_{n-1}^1 x + \beta_{n-1}^1 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_0^n x - \beta_0^n & \ldots & \alpha_{n-1}^n x + \beta_{n-1}^n \end{vmatrix}.$$

Si les égalités (3) pouvaient avoir lieu sans que tous les polynomes $\varphi_k(x)$ fussent nuls, il faudrait que le déterminant

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \ldots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \ldots & A_n^2 \\ A_1^n & A_2^n & \ldots & A_n^n \end{vmatrix}$$

fût nul. Or, ceci est impossible, car Δ' est le déterminant adjoint de Δ; on a donc

$$\Delta' = \Delta^{n-1},$$

et Δ' ne pourrait être nul que si Δ l'était, ce qui ne peut avoir lieu, puisqu'on doit avoir

$$(-1)^n \Delta = \mu \gtrless 0.$$

On doit donc avoir, identiquement,

$$\varphi_k(x) = \alpha_0^k x^{n+1} + (\beta_0^k + \alpha_1^k) x^n + (\beta_1^k + \alpha_2^k) x^{n-1} - \ldots + \beta_n^k = 0;$$

ce qui entraîne

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha_0^k = 0, & \beta_0^k = -\alpha_1^k, \quad \beta_1^k = -\alpha_2^k \quad \ldots, \\ & \beta_{n-1}^k = -\alpha_n^k, \quad \beta_n^k = 0. \end{cases}$$

Ces conditions (4) sont donc *nécessaires;* elles sont, d'ailleurs, suffisantes. Pour le vérifier, il suffit de prouver que, lorsqu'elles sont remplies, Δ *est une constante.* Or on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\alpha_1^1 & \alpha_1^1 x - \alpha_2^1 & \alpha_2^1 x - \alpha_3^1 & \ldots & \alpha_{n-1}^1 x - \alpha_n^1 \\ -\alpha_1^2 & \alpha_1^2 x - \alpha_2^2 & \alpha_2^2 x - \alpha_3^2 & \ldots & \alpha_{n-1}^2 x - \alpha_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\alpha_1^n & \alpha_1^n x - \alpha_2^n & \alpha_2^n x - \alpha_3^n & \ldots & \alpha_{n-1}^n x - \alpha_n^n \end{vmatrix},$$

ce qui, par des transformations faciles, donne

$$\Delta = (-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

En résumé, nous arrivons à la formule générale suivante qui donne tous les déterminants de la forme cherchée :

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -\alpha_1^1 & \alpha_1^1 x - \alpha_2^1 & \alpha_2^1 x - \alpha_3^1 & \dots & \alpha_n^1 x \\ -\alpha_1^2 & \alpha_1^2 x - \alpha_2^2 & \alpha_2^2 x - \alpha_3^2 & \dots & \alpha_n^2 x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_1^n & \alpha_1^n x - \alpha_2^n & \alpha_2^n x - \alpha_3^n & \dots & \alpha_n^n x \end{vmatrix}$$
$$= \mu(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n),$$

en posant

$$\mu = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

La formule que j'ai donnée au début est le cas particulier où l'on prend

$$\alpha_i^k = 0 \qquad \text{pour} \qquad i \gtrless k,$$

et

$$\alpha_k^k = \frac{1}{(m-k)!}.$$

La formule de M. Laisant est, de même, le cas particulier où l'on a

$$\alpha_i^k = 0 \qquad \text{pour} \qquad i \gtrless k,$$

et

$$\alpha_k^k = 1.$$

[R4b]

SUR L'ÉQUILIBRE INDIFFÉRENT D'UNE CHAINE PESANTE SUR UNE COURBE;

Par M. KARAGIANNIDÈS.

Considérons une courbe parfaitement polie et une chaîne homogène pesante de longueur l glissant sans frottement sur la courbe. Quelle doit être la forme de la courbe pour que la chaîne soit en équilibre dans toutes ses positions?

Il faut et il suffit pour cela que le centre de gravité de la chaîne reste à une hauteur constante, quand la chaîne glisse sur la courbe. Prenons un axe Oy vertical et appelons s l'arc de courbe; on devra avoir

$$(1) \qquad \int_s^{s+l} y\,ds = C,$$

quel que soit s. Soit, le long de la courbe,

$$y = f(s),$$

en différentiant l'équation (1), on aura

$$(2) \qquad f(s+l) - f(s) = 0.$$

La fonction $f(s)$ doit donc admettre la période l. Il y a une infinité de courbes planes et gauches répondant à la question.

Bornons-nous à des exemples simples de courbes planes dans un plan vertical.

Supposons

$$y = a \sin \frac{2\pi s}{l},$$

a constante. On en tire

$$s = \frac{l}{2\pi} \arcsin \frac{y}{a},$$

et en différentiant

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{l}{2\pi} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

$$dx^2 = dy^2 \left(\frac{l^2}{4\pi^2} \frac{1}{a^2 - y^2} - 1 \right).$$

Posons pour abréger $\frac{l}{2\pi} = b$. Nous avons

$$dx = dy \sqrt{\frac{b^2 - a^2 + y^2}{a^2 - y^2}}.$$

On a donc x en fonction de y par une intégrale elliptique.

Dans le cas particulier où $b = a$, l'intégration est immédiate; on a

$$dx = -\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \qquad x - x_0 = -\sqrt{a^2 - y^2};$$

la courbe est un cercle de rayon a, et de circonférence

$$2\pi a = 2\pi b = l,$$

solution évidente.

Supposons maintenant a différent de b, et pour fixer les idées $a < b$. On a alors, en faisant

$$b^2 - a^2 = \alpha^2,$$

$$(c) \qquad dx = dy \sqrt{\frac{\alpha^2 + y^2}{a^2 - y^2}}, \qquad x = \int_0^y dy \sqrt{\frac{\alpha^2 + y^2}{a^2 - y^2}}.$$

Cette courbe est aisée à construire : elle n'a pas de tangente verticale, car $\frac{dx}{dy}$ ne s'annule pas; elle a des inflexions sur Ox, comme une sinusoïde.

En intégrant par des fonctions elliptiques avec les notations de Jacobi, on obtiendra (*voyez*, par exemple, le Traité de MM. Appell et Lacour):

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \alpha^2 u + Z(u),\\ u &= \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(\alpha^2+y^2)(a^2-y^2)}} = \frac{1}{b}\arg \operatorname{cn}\frac{y}{a} \end{aligned}\right\} \left(\operatorname{mod}\frac{a}{b}\right),$$
$$y = a \operatorname{cn} b u.$$

Si a était supérieur à b, la courbe aurait des tangentes verticales et horizontales.

On pourrait prendre de même, au lieu de la solution simple

$$y = a \sin\frac{2\pi s}{l},$$

$$y = A_1 \cos\frac{2\pi s}{l} + B_1 \sin\frac{2\pi s}{l} + A_2 \cos\frac{4\pi s}{l} + B_2 \sin\frac{4\pi s}{l} + \ldots + A_n \cos\frac{2n\pi s}{l} + B_n \sin\frac{2n\pi s}{l},$$

les A et les B étant des constantes. Il serait intéressant de voir si, parmi ces courbes, il s'en trouve d'algébriques autres que le cercle.

[C3]

SUR UN CERTAIN JACOBIEN;

PAR M. AUTONNE.

Soient

$$A = \begin{vmatrix} a_{00} & \ldots & a_{0n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n0} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad b_{00} = \frac{\partial A}{\partial a_{00}}, \qquad \ldots$$

et les relations $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$

$$(o)\quad y_i = A_i A_0^{-1}, \quad A_i = a_{i0} + \sum_j a_{ij} x_j, \quad A_0 = a_{00} + \sum_j a_{0j} x_j.$$

A titre d'exercice sur le calcul des déterminants, je me propose de déterminer le jacobien

$$Y = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}.$$

La différentiation du système (0) fournit immédiatement

$$A_0^2 \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = A_0 a_{ij} - A_i a_{0j} = p_{ij}.$$

Le déterminant à n^2 éléments P des p_{ij} se compose d'une suite de déterminants constitués de la façon suivante : on remplace dans b_{00}, dans α colonnes, les éléments a par les éléments $A_0 a_{ij}$; dans $n - \alpha$ colonnes, les éléments a par les éléments $- A_i a_{0j}$. Tous les déterminants à quatre éléments

$$\begin{vmatrix} A_i a_{0j} & A_i a_{0j'} \\ A_{i'} a_{0j} & A_{i'} a_{0j'} \end{vmatrix}$$

sont nuls; donc il suffira de prendre $n - \alpha = 0$ ou 1 et $\alpha = n$ ou $n - 1$. Bref

$$P = A_0^n b_{00} - A_0^{n-1} \sum_j Q_j a_{0j},$$

$$Q_j = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{i,j-1} & A_i & a_{i,j+1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Dans Q_j retranchons de la $j^{\text{ième}}$ colonne les éléments des autres, multipliés respectivement par $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$. Il ne restera de A_i que $a_{ij} x_j + a_{i0}$.

$$Q_j = x_j \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{i,j-1} a_{i0} & a_{i,j+1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant est b_{00}; le second, faisant venir la $j^{\text{ième}}$ colonne au premier rang par $j-1$ dérangements d'indices, est

$$(-1)^{j-2}\begin{vmatrix} \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{i0}a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Le coefficient de $(-1)^{j-1}$ est $(-1)^j b_{0j}$; bref

$$Q_j = b_{00}x_j - b_{0j}, \qquad \sum_i a_{0j}Q_j = b_{00}(A_0 - a_{00}) - (A - a^0{}_0\, b_{00}).$$

$$\sum_j a_{0j}Q_j = A_2 b_{00} - A,$$

$$P = A_0^n b_{00} - A_0^{n-1}(A_0 b_{00} - A) = A_0^{n-1}A;$$

enfin

$$Y = \frac{A}{A_0^{n+1}}, \text{ expression homogène de degré zéro}$$
par rapport aux a.

Résolvons les équations (o) par rapport aux x:

$$x_j = \frac{B_j}{B_0}; \qquad B_j = b_{0j} + \sum_i b_{ij}y_i; \qquad B_0 = b_{00} + \sum_i b_{i0}y_i.$$

Il viendra

$$X = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \frac{B}{B_0^{n+1}}; \qquad B = A^n,$$

B étant le déterminant des b (système adjoint des a).

Remplaçons dans B_0 les y par leur expression en x. Il viendra

$$\frac{b_{00}A_0 + \sum_i b_{i0}\left(\sum_j a_{ij}x_j + a_{i0}\right)}{A_0}$$
$$= \frac{b_{00}A_0 - b_{00}\sum_j x_j a_{0j} + A - a_{00}b_{00}}{A_0} = \frac{A}{A_0}.$$

Alors

$$X = \frac{B}{B_0^{n+1}} - A^n \left(\frac{A_0}{A}\right)^{n+1} = \frac{A_0^{n+1}}{A}.$$

$XY = 1$, ce qui devait être.

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION D'AVRIL 1897. — COMPOSITIONS.

Lille.

Analyse. — 1° *Définir l'intégrale d'une fonction de variable complexe, prise le long d'un contour donné. La fonction $f(z)$ étant supposée continue dans une aire donnée A, à quelles conditions doivent satisfaire sa partie réelle et sa partie imaginaire pour que l'intégrale ait la même valeur, quel que soit le contour fermé, contenu dans cette aire, le long duquel on effectue l'intégration.*

2° *Définir les lignes de courbure d'une surface et former leur équation différentielle : la surface étant supposée réglée, on demande de la déterminer sachant que tout plan parallèle à $x\text{O}y$ la coupe suivant une ligne de courbure. On fera voir d'abord que ces lignes de courbure sont nécessairement des cercles ; on en déduira que la surface est de révolution.*

Mécanique. — I. *Mouvement d'un solide autour d'un point fixe.*

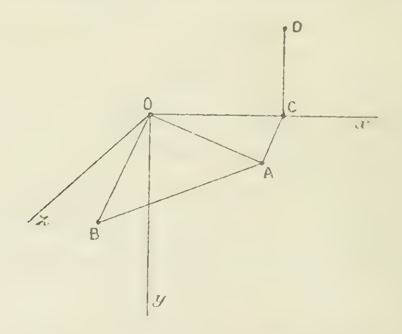
On traitera seulement les questions suivantes :

1° *Relations entre les angles d'Euler et les composantes de la rotation instantanée :*

2° *Couple résultant des forces d'inertie;*

3° *Équations du mouvement, intégrales premières de ces équations dans le cas où les forces extérieures admettent une résultante unique passant par le point fixe.*

II. *Un triangle isoscèle rectangle* OAB, *homogène et pesant, est mobile sans frottement autour d'un axe fixe horizontal* Oz *perpendiculaire à son plan* xOy *et passant par le sommet* O *de l'angle droit. Un fil élastique* DCA, *dont une extrémité* D *est fixe, soutient à son autre extrémité le triangle* AOB *auquel il est attaché en* A. *Ce fil passe en outre dans un anneau très petit* C *situé sur l'horizontale* Ox, *à une distance* OC *du point* O *égale à* OA.



Déterminer la position d'équilibre du triangle AOB, *le mouvement de ce triangle, la réaction de l'axe* Oz, *et en particulier la durée des petites oscillations.*

On supposera que la longueur du fil, dans son état naturel, est égale à DC, *et que* OC *est la longueur dont ce fil s'allonge à l'état d'équilibre sous l'action d'un poids égal à celui du triangle* AOB.

(*On rappelle que la tension d'un fil élastique est proportionnelle à l'allongement de ce fil.*)

Astronomie. — *Déterminer l'azimut et la distance zénithale que l'on devra obtenir pour le centre du Soleil, observé en un lieu A de longitude* $0^h 14^m 57^s,1$ (E) *et de latitude* $50° 46' 34'',0$ (B), *à* $2^h 5^m 12^s,0$, *temps moyen local, pour un jour donné.*

Le jour de l'observation, à midi moyen de Paris, la déclinaison du Soleil est $+17° 51' 13'',1$, *et elle diminue de* $38'' 29'$ *par heure.*

Le même jour, à midi moyen de Paris, le temps vrai est de $11^h 53^m 55^s,74$ *et le lendemain, à midi moyen, il est de* $11^h 54^m 0^s,02$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1746

(1896, p. 440).

Le volume d'un tétraèdre est égal aux deux tiers du produit des sections faites par deux plans médians menés par deux arêtes opposées de ce tétraèdre, multiplié par le sinus de l'angle de ces deux plans et divisé par la médiane du tétraèdre suivant laquelle ils se coupent.

(Genty.)

SOLUTION

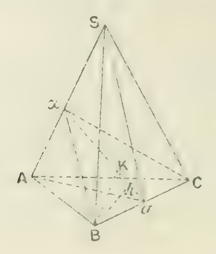
Par M. Dulimbert.

Soient SABC le tétraèdre; $SA\alpha$, αBC les deux sections médianes qui se coupent suivant la médiane $a\alpha$; ω le dièdre des plans $a\alpha A$, $a\alpha B$.

De B je mène la perpendiculaire BK sur la droite $a\alpha$ et la perpendiculaire Bh sur le plan médian SAa. BKh est l'angle plan du dièdre des deux plans médians. Donc $Bh = BK \sin\omega$.

Cela posé, le volume du tétraèdre est égal à deux fois celui du tétraèdre BASa, c'est-à-dire à

$$\frac{2}{3}.\mathrm{SA}a.\mathrm{B}h = \frac{2}{3}.\mathrm{SA}a.\mathrm{BK}\sin\omega.$$



Or la surface de la section médiane αBC est égale à $a\alpha$.BK. Donc

$$\mathrm{BK} = \frac{\alpha\mathrm{BC}}{a\alpha}.$$

Donc enfin le volume est égal à

$$\frac{2}{3}\,\frac{\mathrm{SA}a.\alpha\mathrm{BC}}{a\alpha}\sin\omega. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Autres solutions de MM. Brand et Taratte.

Question 1750.

(1896, p. 76.)

Soit m un point quelconque d'une conique de centre O; *par les points* O *et m on mène les droites* O*p et mp, également inclinées sur les axes, respectivement, que la droite* O*m et la tangente en m. La perpendiculaire élevée à mp au point p passe par le centre de courbure en m.*

(E. Duporcq.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Appelons m' le point où mp va couper ultérieurement la conique, et μ le symétrique de m par rapport à un axe de la courbe : mp est parallèle à la tangente en μ, et par suite p est le milieu de la corde mm' ; mais le centre de courbure

en m est sur un cercle mené par les points m et m'; donc, etc. La construction indiquée par M. Duporcq coïncide donc avec celle de Steiner (*Vorlesungen*, p. 312).

Autres solutions de MM. E.-N. Barisien, Droz-Farny et E. Taratte; un anonyme nous a aussi envoyé la suivante :

Les droites mt, mp, également inclinées sur les axes, ont pour diamètres conjugués les droites également inclinées sur les axes : Om, Op. Si l est le point où mp coupe la conique, le point p est alors le milieu de ml.

On sait que le cercle de courbure en m passe par l; son centre est sur la perpendiculaire à ml élevée du milieu p de cette corde.

Question 1753.

(1896, p. 58).

Le lieu des pôles des spirales logarithmiques osculatrices aux diverses sections ayant même tangente en un point d'une surface est un cercle. (A. Pellet.)

SOLUTION
Par M. A. Mannheim.

Par la droite at, tangente en a à la surface donnée, menons un plan. Appelons α le centre de courbure, pour le point a, de la section S ainsi obtenue, et γ le centre de courbure correspondant de la développée de cette courbe.

La spirale logarithmique, tangente en a à S, et dont le centre de courbure de sa développée est γ, a un pôle p qu'on obtient en projetant α sur $a\gamma$.

Lorsque le plan sécant tourne autour de at les points tels que α décrivent un cercle C et la droite $a\gamma$ reste dans un plan (P) [1] : *les pôles tels que p appartiennent alors au petit cercle tracé sur* (P) *de la sphère dont* C *est un grand cercle.*

[1] *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 333 et 334.

Question 1757.

(1897, p. 100.)

Des paraboles ont un contact du second ordre avec une courbe plane donnée, en un même point de cette courbe; quelle est l'enveloppe de leurs axes? Déterminer, pour l'un de ces axes, le point où il touche cette enveloppe et construire le centre de courbure de cette courbe correspondant à ce point de contact [1]. (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. AUDIBERT.

Plaçons l'origine au point fixe de contact du second ordre, l'axe des x sera tangente commune. La parabole

(1) $$(py+x)^2+2qy=0,$$

qui fait partie du faisceau, n'a que le paramètre p de variable, car, à l'origine, sa dérivée seconde $-\frac{1}{q}$ est une constante. Le coefficient angulaire de l'axe de (1) est $-\frac{1}{p}=\tan\alpha$, et au sommet correspondant on aura

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(py+x)}{p(py+x)+q}=p,$$

ou

(2) $$py+x+\frac{qp}{1+p^2}=0,$$

équation de cet axe.

En combinant (2) avec sa dérivée relative à p, on a les coordonnées du point de contact de l'axe avec son enveloppe,

(3) $$x=-\frac{2qp^3}{(p^2+1)^2},\qquad y=q\,\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}.$$

L'élimination de p entre (2) et (3) donne l'équation de l'en-

---

[1] *Voir* aussi l'article de M. d'Ocagne, page 252; 1897.

veloppe

$$4y(y+q)^3 + 4x^4 + 8x^2y^2 - 20qx^2y - q^2x^2 = 0.$$

En substituant à p sa valeur $-\frac{1}{\tan g \alpha}$, (2) s'écrira

$$\frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha} = q\sin\alpha,$$

et de (3) on tire la relation

$$\frac{x}{\cos 2\alpha} + \frac{y}{\sin 2\alpha} = q.$$

Chacune de ces droites est facile à construire, et leur rencontre déterminera le point de contact.

La normale en ce point

$$y - px = \frac{q}{1+p^2}(2p^2 - 1)$$

rencontre la normale infiniment voisine au centre de courbure, dont les coordonnées sont

$$x_1 = -\frac{6pq}{(p^2+1)^2}, \qquad y_1 = \frac{q}{(p^2+1)^2}(2p^4 - 5p^2 - 1);$$

à l'aide de (3) on a

$$y - y_1 = \frac{2qp^2}{(p^2+1)^2}(3-p^2), \qquad x - x_1 = \frac{2qp}{(p^2-1)^2}(3-p^2);$$

d'où l'expression du rayon de courbure

$$l = \frac{2qp(p^2-3)}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}} = 2q\cos 3\alpha.$$

Autre solution de M. H. Brocard.

Question 1760.

(1897, p. 148)

Étant donnés deux faisceaux, l'un d'ordre m, l'autre d'ordre n, le lieu géométrique des points où les courbes des deux faisceaux se coupent sous un angle constant α est une courbe d'ordre 2(m + n − 1). Quand α = 0, cette

courbe se décompose en une courbe d'ordre $2(m+n)-3$ *et la droite de l'infini.* (E. Dewulf.)

SOLUTION

Par M. G. Leinekugel.

Considérons, en effet, les deux faisceaux linéaires

$$(1) \qquad C_m(x,y) = \varphi_m(x,y) + \lambda\,\psi_m(x,y) = 0,$$

$$(2) \qquad C_n(x,y) = \theta_n(x,y) + \mu\,\chi_n(x,y) = 0;$$

la condition pour que, en un point (x, y), les deux courbes se coupent sous un angle α, est

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{tang}\alpha \left(\frac{\partial C_m}{\partial x}\frac{\partial C_n}{\partial x} + \frac{\partial C_m}{\partial y}\frac{\partial C_n}{\partial y} \right) \\ &\quad = \frac{\partial C_m}{\partial x}\frac{\partial C_n}{\partial y} - \frac{\partial C_m}{\partial y}\frac{\partial C_n}{\partial x}. \end{aligned} \right.$$

L'élimination de λ, μ entre les équations précédentes conduit à l'équation du lieu

$$\begin{aligned} &\operatorname{tang}\alpha[(\varphi'_x m\,\psi m - \psi'_x m\,\varphi m)(\theta'_x n\,\chi n - \theta n\,\chi'_x n) \\ &\qquad + (\varphi'_y m\,\psi m - \psi'_y m\,\varphi m)(\theta'_y n\,\chi n - \theta n\,\chi'_y n)] \\ &= (\varphi'_x m\,\psi m - \psi'_x m\,\varphi m)(\theta'_y n\,\chi n - \chi'_y n\,\theta n) \\ &\qquad - (\theta'_x n\,\chi n - \chi'_x n\,\theta n)(\varphi'_y m\,\psi m - \psi'_y m\,\varphi m). \end{aligned}$$

Dans le cas où $\alpha \gtrless 0$, on voit nettement, en posant

$$\begin{aligned} \varphi m(x,y) &= A_m x^m + \ldots + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \\ \psi m(x,y) &= A'_m x^m + \ldots + A'x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2E'y + F' = 0, \\ \theta n(x,y) &= a_n x^n + \ldots + ax^2 + 2bxy + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ \chi n(x,y) &= a'_n x^n + \ldots + a'x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{aligned}$$

que le degré du premier membre de l'équation est

$$m + m - 1 + n + n - 1 = 2(m+n-1);$$

dans le second membre, au contraire, le terme constant disparaît, et si les équations ont été rendues homogènes en x, y, z, le facteur z est en facteur d'où le lieu s'abaisse au cas où $\alpha = 0$ à $2(m+n) - 3$.

QUESTIONS.

1775. On donne un point O et une droite D fixes. Une figure de grandeur invariable formée d'un point ω et d'une droite Δ se déplace de façon que ω reste sur D et que Δ, s'appuyant toujours sur cette droite, passe toujours par O. On demande le lieu d'un point arbitraire du plan de la figure mobile. Examiner les différentes formes de ce lieu, lorsqu'on fait varier les données. (MANNHEIM.)

1776. Soit $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ une forme positive et $\varphi(h) = \sum' \frac{1}{f(x, y)}$, la somme étant étendue à tous les systèmes de valeurs entières des indéterminées x et y, tels que

$$f(x, y) \text{ soit } < h.$$

On excepte, bien entendu, le système particulier $x = y = 0$, ce que nous indiquons en affectant le signe $\sum$ d'un accent. Démontrer que la différence

$$\varphi(h) - \frac{\pi}{\sqrt{ac - b^2}} \log h$$

tend vers une limite déterminée quand h augmente indéfiniment. (J. FRANEL.)

1777. Soit, plus généralement,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum a_{rs} x_r x_s \quad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots, p \\ s = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

une forme positive des p variables $x_1, \ldots, x_p$, $D = |(a_{rs})|$ son déterminant et

$$\varphi(h) = \sum' \frac{1}{[f(x_1, x_2, \ldots, x_p)]^{\frac{p}{2}}},$$

la somme étant étendue à tous les systèmes de valeurs entières

des variables (à l'exception du système $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$) satisfaisant à l'inégalité

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqq h.$$

Démontrer que la différence

$$\varphi(h) - \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \log h$$

tend vers une limite déterminée quand h augmente *indéfiniment*. (J. FRANEL.)

1778. Une conique rencontre les côtés BC, CA, AB d'un triangle en D, D′, E, E′, F, F′. Les tangentes en D, D′ rencontrent AB, AC en K, K′. L est le conjugué harmonique de B par rapport aux F, F′. M est le conjugué harmonique de C par E, E′.

Démontrer que D′L, DM, KK′, concourent en un même point. (W.-J. GREENSTREET.)

1779. La ligne OMN rencontre les lignes AB, AC en M et N, de telle sorte qu'on a

$$OM^2 . AN . AC = ON^2 . AM . MB.$$

Déterminer O. (W.-J. GREENSTREET.)

1780. On projette orthogonalement un parallélogramme décrivant un carré. Trouver la diagonale du carré en fonction des côtés du parallélogramme et de l'angle compris.

(W.-J. GREENSTREET.)

1781. Soient donnés trois nombres positifs x, y, z tels que

$$x + y + z = 1.$$

On a les inégalités

(1) $$yz + xz + xy \leqq \frac{11}{48},$$

(2) $$x^2 + y^2 + z^2 \geqq 13xyz,$$

(3) $$(x^2 + y^2 + z^2) - (yz + xz + xy) \geqq \frac{9}{16}.$$

(JORGE-F. D'AVILLEZ.)

[D2]

ÉTUDE SUR LES SUBSTITUTIONS DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. H. LAURENT.

I. — PRÉLIMINAIRES.

Je me propose, dans ce qui va suivre, d'étudier les propriétés des substitutions linéaires du second degré dont le déterminant est un; au fond, cette étude est identique à celle des substitutions de la forme

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Cette étude a déjà été entreprise et menée à bonne fin par M. Poincaré; mais les lignes qui suivent n'ont rien de commun avec le travail de M. Poincaré, et je me place sur un tout autre terrain que l'illustre géomètre.

Les substitutions que nous allons étudier peuvent se mettre sous la forme symbolique

$$\alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij = a\tau_{11} + b\tau_{12} + c\tau_{21} + d\tau_{22},$$

i et j désignant des substitutions de la forme

$$i = \tau_{12} + \tau_{21}, \qquad j = \tau_{11} - \tau_{22};$$

alors on aura

$$(1) \quad a = \alpha + \gamma, \qquad d = \alpha - \gamma, \qquad b = \beta - \delta, \qquad c = \beta + \delta;$$

$$(2) \quad \alpha = \frac{a+d}{2}, \qquad \gamma = \frac{a-d}{2}, \qquad \beta = \frac{b+c}{2}, \qquad \delta = \frac{c-b}{2}.$$

$$(3) \qquad i^2 = 1, \qquad j^2 = 1, \qquad ij = -ji.$$

Si l'on suppose le déterminant $ad - bc$ de la substitution égal à 1, on aura

$$\alpha^2 - \gamma^2 - \beta^2 + \delta^2 = 1.$$

II. — Substitutions sans partie numérique.

Nous considérerons d'abord le cas où $\alpha = 0$: la substitution considérée est de la forme

$$v = \beta i + \gamma j + \delta ij,$$
$$\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = -1;$$

dans le cas où $\alpha = 0$, nous supposerons encore que le déterminant peut être -1 ou zéro, en sorte que l'on pourra avoir

$$\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 1,$$
$$\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 0;$$

soit v' une autre substitution analogue à v

$$v' = \beta' i + \gamma' j + \delta' ij,$$

on aura

$$vv' = \beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta' + i(\delta\gamma' - \gamma\delta') + j(\beta\delta' - \delta\beta') - ij(\gamma\beta' - \beta\gamma'),$$

de sorte que si l'on pose

$$\beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta' = \frac{\lambda}{2},$$

on aura

$$vv' + v'v = \lambda, \tag{1}$$

et dans le cas où $v = v'$ on a $v^2 = \pm 1$ ou zéro en sorte que le carré de v sera égal à ± 1 ou à zéro suivant les cas.

III. — Groupe dérivé d'une seule substitution.

Nous distinguerons trois espèces de substitutions, dans le cas où α, β, γ, δ sont réels; soit

$$s = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij.$$

1° Si $\alpha^2 < 1$, on dit que la substitution s est ellip-

tique ; on peut la mettre sous la forme

$$\alpha + \sqrt{1-\alpha^2}\,\frac{\beta i + \gamma j + \delta ij}{\sqrt{-\beta^2-\gamma^2+\delta^2}},$$

car, en vertu de

$$\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2=1,$$

les radicaux sont réels, et l'on peut poser

$$\alpha = \cos\theta, \qquad v = \frac{\beta i + \gamma j + \delta ij}{\sqrt{-\gamma^2-\beta^2+\delta^2}}.$$

Alors s prend la forme

$$s = \cos\theta + v\sin\theta,$$

et l'on a

$$v^2 = -1;$$

on en conclut, si m est entier,

$$s^m = \cos m\theta + v\sin m\theta.$$

2° Si $\alpha^2 > 1$, on dit que la substitution est hyperbolique, alors on écrit

$$s = \alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\,\frac{\beta i + \gamma j + \delta ij}{\sqrt{\gamma^2+\beta^2-\delta^2}},$$

et si l'on pose $\alpha = \operatorname{ch}\varphi$ ou $-\operatorname{ch}\varphi$ suivant que α est positif ou négatif, on a

$$s = \operatorname{ch}\varphi + v\operatorname{sh}\varphi \qquad \text{ou} \qquad s = -\operatorname{ch}\varphi - v\operatorname{sh}\varphi\ldots.$$

$$v^2 = +1,$$

$$(\pm s)^m = \operatorname{ch} m\varphi + v\operatorname{sh} m\varphi.$$

3° Si $\alpha^2 = 1$, on dit que la substitution est parabolique et l'on peut poser

$$s = 1 + v, \qquad v^2 = 0,$$

$$s^m = 1 + vm.$$

4° Si la substitution s est elliptique, le groupe dérivé (formé des puissances de s) est en général d'ordre

infini ; il contient une substitution infinitésimale

$$\cos m\theta + \nu \sin m\theta,$$

car on peut choisir m de telle sorte que $\cos m\theta$ soit aussi voisin que l'on veut de l'unité ($\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ donne $a = d = 1$). Cependant si θ est commensurable avec π le groupe contiendra un nombre fini de substitutions distinctes.

2° Si la substitution s est hyperbolique, s^m est de la forme $\pm(\operatorname{ch} m\theta + \nu \operatorname{sh} m\theta)$, elle n'est jamais infinitésimale, le groupe dérivé de s est discontinu. Il en est évidemment de même si s est parabolique. La forme $\cos\theta + \nu \sin\theta$ convient à toutes les substitutions si θ n'est pas réel.

IV. — Groupe dérivé de substitutions échangeables.

Soit

$$s = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij,$$
$$s' = \alpha' + \beta' i + \gamma' j + \delta' ij,$$

on a

$$(1)\quad \begin{cases} ss' = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta' + i(\alpha\beta' + \beta\alpha' + \delta\gamma' - \gamma\delta') \\ \qquad + j(\alpha\gamma' - \gamma\alpha' + \beta\delta' - \delta\beta') \\ \qquad + ij(\alpha\delta' + \delta\alpha' + \beta\gamma' - \gamma\beta'); \end{cases}$$

et si l'on a $ss' = s's$, il faut que

$$(2)\qquad \delta\gamma' - \gamma\delta' = \beta\delta' - \delta\beta' = \beta\gamma' - \gamma\beta' = 0;$$

donc les deux substitutions seront de la forme

$$a + b\nu, \qquad a' + b'\nu,$$

a, b, a', b' désignant des nombres ; car, en vertu de (2), $\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\delta}{\delta'}$. Ces deux substitutions seront à la fois elliptiques, ou à la fois hyperboliques, ou à la fois paraboliques (en supposant les coefficients réels) :

1° Si elles sont elliptiques on peut poser

$$s = \cos\theta + v\sin\theta, \qquad s' = \cos\theta' + v\sin\theta';$$

alors

$$ss' = \cos(\theta + \theta') + v\sin(\theta + \theta'),$$

et plus généralement

$$s^m s'^n = \cos(m\theta + n\theta') + v\sin(m\theta + n\theta'):$$

telle est l'expression de la substitution la plus générale du groupe; elle pourra être infinitésimale pour des valeurs convenables de m et n et le groupe sera continu, à moins que θ et θ' soient commensurables avec π : le groupe dérivé de s et s' sera alors d'ordre fini. On verrait de même que le groupe dérivé d'un nombre quelconque de substitutions elliptiques échangeables est continu ou d'ordre fini.

2° Si les substitutions s et s' sont hyperboliques et toutes deux de la forme

$$\pm(\operatorname{ch}\theta + v\operatorname{sh}\theta), \qquad \pm(\operatorname{ch}\theta' + v\operatorname{sh}\theta'),$$

elles donneront lieu à un groupe d'ordre infini, discontinu si θ et θ' sont commensurables, mais continu s'il n'en est pas ainsi.

V. — Groupe dérivé de deux substitutions sans partie numérique.

Considérons deux substitutions sans partie numérique

$$v = \beta i + \gamma j + \delta ij, \qquad v' = \beta' i - \gamma' j + \delta' ij,$$

on a

$$vv' = \beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta' + i(\delta\gamma' - \gamma\delta') + j(\beta\delta' - \delta\beta') + ij(\beta\gamma' - \gamma\beta');$$

ce produit est tout à fait quelconque, en sorte que toute substitution est le produit de deux autres sans partie

numérique (et de déterminant ± 1). En effet, si l'on pose

$$\begin{aligned}\beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta' &= \alpha'',\\ \delta\gamma' - \gamma\delta' &= \beta'',\\ \beta\delta' - \delta\beta' &= \gamma'',\\ \beta\gamma' - \gamma\beta' &= \delta'',\end{aligned}$$

α'' satisfaisant à la relation

$$\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 - \delta''^2 = (\beta^2 - \gamma^2 - \delta^2)(\beta'^2 + \gamma'^2 - \delta'^2),$$

on aura la première équation comme conséquence des trois autres. On tire de celles-ci

$$\begin{aligned}\beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \delta\delta'' &= 0,\\ \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' - \delta'\delta'' &= 0,\end{aligned}$$

et il est clair qu'il y a une infinité de systèmes de valeurs admissibles pour β, β', γ, γ', δ, δ'.

Le produit $\nu\nu'$ pourra se mettre sous la forme $\cos\theta + \omega\sin\theta$ ou $\operatorname{ch}\theta + \omega\operatorname{sh}\theta$: or le groupe dérivé de ν et ν' a pour substitutions les expressions de la forme

$$\pm\,\nu\nu'\nu\nu'\ldots \quad \text{ou} \quad \pm\,\nu'\nu\nu'\nu\ldots$$

qu'on ramènera à

$$\cos m\theta + \omega\sin m\theta$$

ou à

$$\nu(\cos m\theta + \omega\sin m\theta)$$

ou ...; il sera donc facile de se décider sur la nature du groupe en question.

Il est bon d'observer :

1° Que deux substitutions s et s' étant données, il existera toujours trois substitutions sans partie numérique, ν, ν', ν'' telles que

$$\begin{aligned}s &= \nu\nu' \quad \text{ou} \quad \nu'\nu,\\ s' &= \nu'\nu'' \quad \text{ou} \quad \nu''\nu' ;\end{aligned}$$

enfin, 2° que l'on a

$$\frac{1}{\nu\nu'} = \nu'\nu.$$

Maintenant proposons-nous de mettre le produit

(1) $$s^\alpha s'^\beta s^\gamma s'^\delta \ldots$$

sous la forme

$$a + b\nu + c\nu' + d\nu\nu',$$

s et s' désignant des substitutions de la forme $a + b\nu$ et $a' + b\nu'$. Nous supposerons $\nu^2 = 1$, $\nu'^2 = 1$, $\nu\nu' = (\nu'\nu)^{-1}$. Le produit (1) est l'expression générale d'une substitution du groupe dérivé de s et s'; s^α est de la forme $\operatorname{ch}\alpha\theta + \nu\operatorname{sh}\alpha\theta$, si l'on suppose $s = \operatorname{ch}\theta + \nu\operatorname{sh}\theta$, en sorte que l'on peut supposer

$$s^\alpha = a_1 + b_1\nu, \qquad s'^\beta = a_2 + b_2\nu', \qquad \ldots,$$

et l'on est ramené à l'évaluation du produit

$$(a_1 + b_1\nu)(a_2 + b_2\nu')(a_3 + b_3\nu)(a_4 + b_4\nu')\ldots;$$

ce produit est de la forme

$$\Sigma a_\alpha a_\beta \ldots b_{\alpha'} b_{\beta'} \ldots \nu\nu'\nu\nu' \ldots$$

(et $\nu\nu' = \cos\varphi + \varpi\sin\varphi$ ou $\operatorname{ch}\varphi + \varpi\operatorname{sh}\varphi$, ..., alors $\nu'\nu = \cos\varphi - \varpi\sin\varphi$).

Le but que nous poursuivons est surtout d'évaluer la partie numérique du produit (1), ce qui doit permettre de découvrir la nature du groupe dérivé de s et s'; or cette partie numérique est la même que dans l'inverse du produit (1) et cet inverse n'en diffère que par le signe de la partie symbolique. Nous pouvons donc négliger les termes qui contiennent un nombre impair de facteurs ν ou b et qui, en ajoutant le produit (1) avec son conjugué, disparaîtraient.

La partie numérique du produit (1) sera alors conte-

nue dans

$$\Sigma a_\alpha a_\beta \ldots b_{\alpha'} b_{\beta'} \ldots (vv')^h$$

ou

$$\Sigma a_\alpha a_\beta \ldots b_{\alpha'} b_{\beta'} \ldots \cos h\varphi.$$

Le terme placé sous le signe Σ contient un nombre pair de facteurs b, les indices α', β', ... sont croissants; les a contiennent les indices autres que α', β', ..., le nombre h s'obtient comme il suit : on parcourt la suite des indices α', β', ..., et chaque fois que l'on rencontre deux indices consécutifs de même parité on les supprime; la moitié du nombre des indices restants est le nombre h.

Groupes de substitutions à un paramètre.

Considérons les substitutions

$$s = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij,$$
$$s' = \alpha' + \beta' i + \gamma' j + \delta' ij.$$

Supposons α, β, γ, δ fonctions d'un paramètre t et α', β', γ', δ' égales aux mêmes fonctions d'un autre paramètre t'. Dans le produit

$$ss' = \alpha'' + \beta'' i + \gamma'' j + \delta'' ij,$$

α'', β'', γ'', δ'' seront, en général, des fonctions de t et t'. On peut se demander la condition pour que α'', β'', γ'', δ'' ne dépendent réellement que d'un seul paramètre t''. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que

$$(a) \qquad \frac{\partial\alpha''}{\partial t} : \frac{\partial\alpha''}{\partial t'} = \frac{\partial\beta''}{\partial t} : \frac{\partial\beta''}{\partial t'} = \frac{\partial\gamma''}{\partial t} : \frac{\partial\gamma''}{\partial t'} = \frac{\partial\delta''}{\partial t} : \frac{\partial\delta''}{\partial t'},$$

et l'une des équations précédentes rentrera dans les autres puisque $\alpha''^2 - \beta''^2 - \gamma''^2 + \delta''^2 = 1$. Or la for-

mule (1) du § 4 donne α'', β'', γ'', δ'' et (a) devient

$$\frac{\alpha'\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\beta'\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\gamma}{\partial t}-\delta'\frac{\partial\delta}{\partial t}}{\alpha\frac{\partial\alpha'}{\partial t'}+\beta\frac{\partial\beta'}{\partial t'}+\gamma\frac{\partial\gamma'}{\partial t'}-\delta\frac{\partial\delta'}{\partial t'}}$$
$$=\frac{\beta'\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\alpha'\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\delta}{\partial t}-\delta'\frac{\partial\gamma}{\partial t}}{\alpha\frac{\partial\beta'}{\partial t'}+\beta\frac{\partial\alpha'}{\partial t'}+\delta\frac{\partial\gamma'}{\partial t'}-\gamma\frac{\partial\delta'}{\partial t'}}$$
$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

or, si l'on observe que le déterminant de $s'\frac{\partial s}{\partial t}$ est égal au produit des déterminants de s' et de $\frac{\partial s}{\partial t}$, c'est-à-dire qu'il est égal au déterminant de $\frac{\partial s}{\partial t}$, on voit que la suite des rapports précédents est égale au rapport d'une fonction de t seul à une fonction de t' seul; il y a plus, ce rapport est de la forme $\frac{f(t)}{f(t')}$ ou, si l'on veut, $\frac{F'(t)}{F'(t')}$, en sorte que, en prenant pour variables $F(t)$ et $F(t')$, on peut supposer les rapports précédents égaux à l'unité, et alors $\frac{\partial\alpha''}{\partial t}=\frac{\partial\alpha''}{\partial t'}$, $\cdots$ et α'', β'', γ'', δ'' sont forcément fonctions de $t+t'$, les substitutions s et s' sont alors échangeables : elles sont donc de la forme

$$\cos t+v\sin t,\quad \ldots.$$

Groupes à deux paramètres.

Si l'on suppose que α et α' soient de la forme $f(t_1, t_2)$ et $f(t'_1, t'_2)$ respectivement, etc., α'', β'', γ'', δ'' dépendront, en général, de quatre paramètres; pour qu'ils ne dépendent que de deux paramètres seulement, il faudra que

$$\frac{\partial(\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'')}{\partial(t_1, t_2, t'_1, t'_2)}=0$$

et que les mineurs du déterminant qui figure dans le premier membre soient nuls. En écrivant ces conditions on arrive, mais assez péniblement à former les groupes à deux paramètres. Il est plus simple de suivre une autre voie et, sans se préoccuper de trouver les groupes les plus généraux à deux paramètres, on peut essayer de trouver d'abord *des groupes* à deux paramètres, ce qui est assez simple.

Les substitutions

$$x' = ax,$$
$$y' = a'x + \frac{1}{a}y,$$

dans lesquelles a et a' sont arbitraires, forment évidemment un groupe; car si l'on pose

$$x'' = a_1 x',$$
$$y'' = a'_1 x' + \frac{1}{a_1}y,$$

on a

$$x'' = aa_1 x,$$
$$y'' = a'_1 a x + \frac{1}{a_1}\left(a'x + \frac{1}{a}y\right) = \left(a'_1 a + \frac{a'}{a_1}\right)x + \frac{1}{aa_1}y$$

et le déterminant des substitutions considérées est un. En sorte que si $s(a, a')$ est une substitution du groupe, on a

$$s(a, a')\, s(a_1, a'_1) = s\left(aa_1,\ aa'_1 + \frac{a'}{a_1}\right).$$

Un groupe à deux paramètres contient une infinité de substitutions infinitésimales dont les puissances sont autant de groupes à un paramètre; donc un groupe à deux paramètres doit contenir des groupes à un paramètre. Soit s une substitution

$$s = \cos\theta + (\beta i + \gamma j + \delta ij)\sin\theta$$

d'un groupe à deux paramètres dont l'un sera θ ; β, γ, δ sont des fonctions de θ et d'un autre paramètre que nous appellerons t. Tout groupe à un paramètre se composant de substitutions échangeables est composé de substitutions qui sont des fonctions d'une substitution de la forme

$$\cos\theta + v\sin\theta \qquad (v = i\beta + j\gamma + ij\delta).$$

où v est constant, et ce groupe contient le groupe à un paramètre $\cos\theta + v\sin\theta$, où θ est variable et v constant. Donc le groupe des substitutions s doit contenir le groupe à un paramètre obtenu en faisant v constant, ce qui ne peut avoir lieu que si γ et δ sont fonctions de β (δ est forcément fonction de β et γ, car $\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 1$). Ainsi, un groupe à deux paramètres peut se mettre sous la forme

$$\cos\theta + (\beta i + \gamma j - \delta ij)\sin\theta,$$

où β, γ, δ sont fonctions d'un paramètre t et où

$$\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 1.$$

Si l'on change θ en θ', t en t', s devient s' et l'on a

$$\begin{aligned} ss' = {} & \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'(\beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta') \\ & + i[\beta\sin\theta\cos\theta' + \beta'\sin\theta'\cos\theta + \sin\theta\sin\theta'(\delta\gamma' - \gamma\delta')] \\ & + j[\gamma\sin\theta\cos\theta' + \gamma'\sin\theta'\cos\theta + \sin\theta\sin\theta'(\beta\delta' - \delta\beta')] \\ & + ij[\delta\sin\theta\cos\theta' + \delta'\sin\theta'\cos\theta + \sin\theta\sin\theta'(\beta\gamma' - \gamma\beta')]. \end{aligned}$$

Si l'on pose aussi

$$s = \cos\theta'' + v''\sin\theta'' = \cos\theta'' + (\beta'' i + \gamma'' j + \delta'' ij)\sin\theta'',$$

il faudra déterminer les coefficients de s et s' de telle sorte que β'', γ'', δ'' soient fonction d'un seul paramètre ou que leurs dérivées soient proportionnelles, ou même que les dérivées de leurs rapports soient proportion-

nelles. Quand on écrit cette condition, on trouve

$$\begin{vmatrix} \beta & \beta' & \delta\gamma'-\gamma\delta' \\ \gamma & \gamma' & \beta\delta'-\delta\beta' \\ \delta & \delta' & \beta\gamma'-\gamma\beta' \end{vmatrix} F(\theta, \theta') = 0.$$

$F(\theta, \theta')$ désignant un certain déterminant qui ne contient que θ et θ', qui n'est pas identiquement nul. Il reste alors à égaler le premier facteur à zéro; il est égal à

$$1-(\beta\beta'+\gamma\gamma'-\delta\delta')^2 = 0.$$

Si l'on différentie cette formule, on a

$$\beta'\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\gamma}{\partial t}-\delta'\frac{\partial\delta}{\partial t} = 0,$$

et si l'on différentie $\beta^2+\gamma^2-\delta^2=1$

$$\beta\frac{\partial\beta}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t}-\delta\frac{\partial\delta}{\partial t} = 0,$$

d'où l'on tire, en supposant les quantités $\beta\gamma'-\gamma\beta'$, ... différentes de zéro,

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}:(\gamma\delta'-\delta\gamma') = \frac{\partial\gamma}{\partial t}:(\delta\beta'-\beta\delta') = \frac{\partial\delta}{\partial t}:(\gamma\beta'-\beta\gamma');$$

on trouve de même

$$\frac{\partial\beta'}{\partial t'}:(\gamma\delta'-\delta\gamma') = \ldots.$$

et, par suite,

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}:\frac{\partial\beta'}{\partial t'} = \frac{\partial\gamma}{\partial t}:\frac{\partial\gamma'}{\partial t'} = \frac{\partial\delta}{\partial t}:\frac{\partial\delta'}{\partial t'};$$

donc

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}\frac{\partial\gamma'}{\partial t'}-\frac{\partial\beta'}{\partial t'}\frac{\partial\gamma}{\partial t} = 0, \qquad \ldots;$$

donc

$$\beta\frac{\partial\gamma'}{\partial t'}-\gamma\frac{\partial\beta'}{\partial t'}, \ \ldots \qquad \text{et} \qquad \beta'\frac{\partial\gamma}{\partial t}-\gamma'\frac{\partial\beta}{\partial t}, \ \ldots$$

sont respectivement indépendants de t' et de t; donc

$$\beta\gamma'-\gamma\beta', \quad \gamma\delta'-\delta\gamma', \quad \beta\delta'-\delta\beta'$$

sont de la forme $F(t)+\Psi(t')$. Mais si $\beta\frac{\partial\gamma'}{\partial t'}-\gamma\frac{\partial\beta'}{\partial t'}$ est indépendant de t, il faut qu'il en soit ainsi pour des valeurs particulières de t'; il existe alors une relation linéaire entre β et γ, etc.; on a donc ainsi trois relations linéaires à coefficients constants entre β, γ, δ; ces trois relations ne sont, il est vrai, pas distinctes, mais on a $\beta^2+\gamma^2-\delta^2=1$, si bien que β, γ, δ, β', γ', δ' se réduisent à des constantes. Or ce résultat ne fournit évidemment pas de solution. Il faut donc supposer seulement un des déterminants $\beta\gamma'-\gamma\beta'$, $\gamma\delta'-\delta\gamma'$, $\delta\beta'-\beta\delta'$ nul. Soit

$$\beta\delta'-\delta\beta'=0,$$

ou

$$\frac{\beta}{\delta}=\frac{\beta'}{\delta'},$$

ce qui ne peut avoir lieu que si $\frac{\beta}{\delta}$ est constant.

Notre groupe aura donc ses substitutions de la forme

$$\cos\theta+\sin\theta(\beta i+\gamma j+k\beta_{ij}),$$

et comme $\beta^2+\gamma^2-\delta^2=1$, $\gamma^2=1-\beta^2(1-k^2)$, k désignant une constante, dans la substitution ss' le coefficient de ij doit être égal à k fois celui de i; cela ne peut avoir lieu que si $k=1$ et alors $\gamma=\pm 1$ et l'on peut supposer $\gamma=1$, en changeant, s'il le faut, le signe de θ. Une discussion semblable permettrait de supposer $\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\beta'}{\gamma'}$; mais on aurait alors des coefficients imaginaires dans la substitution, ce qui n'a d'ailleurs rien d'inadmissible.

Conclusion.

Supposons que l'on donne deux substitutions s et s'; il sera toujours facile de trouver une substitution t telle que tst^{-1} ait le coefficient de i égal à celui de ij et

qu'il en soit de même de $ts't^{-1}$, comme nous allons le voir; mais au groupe dérivé de s et s' correspond un groupe tst^{-1}, $ts't^{-1}$, $tss't^{-1}$, ..., car si s, s', s'', ... forment un groupe tst^{-1}, $ts't^{-1}$, $ts''t^{-1}$, ... en forment un aussi, car

$$tst^{-1} \times ts't^{-1} = tss't^{-1}.$$

Il y a plus, si le groupe des s ne contient pas de substitution infinitésimale, le groupe des tst^{-1} n'en contiendra pas non plus et *vice versa*.

Or, en appelant S et S' les transformées des s et s', elles appartiennent maintenant à un groupe continu; elles sont de la forme

$$\cos\theta + \sin\theta(\beta i + \gamma j + \beta ij),$$

et l'on peut supposer β égal à une fonction quelconque de t, prenant des valeurs données pour $t = t_0$ et $t = t_1$. Un produit de la forme $s^\alpha s^\beta s^\gamma \ldots$ sera de la forme

$$\cos[(\alpha + \gamma + \ldots)\theta + (\beta + \delta + \ldots)\theta'] + \ldots,$$

et il contiendra ou ne contiendra pas de substitution infinitésimale, suivant que

$$m\theta + m'\theta'$$

pourra ou non devenir infiniment petit, sans s'annuler rigoureusement, pour des valeurs entières de m et m'.

J'arrive maintenant à la démonstration de la proposition que nous avons admise. D'abord, on peut supposer le déterminant de t égal à un, vu que dans tst^{-1} on peut diviser t et t^{-1} par un même facteur numérique sans altérer le résultat. Soit

$$s = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij,$$
$$t = \alpha' + \beta' i + \gamma' j + \delta' ij,$$

on a

$$ts = st - 2(\delta\gamma' - \gamma\delta')i - 2(\beta\delta' - \delta\beta')j - 2(\beta'\gamma - \gamma\beta')ij;$$

donc, comme $t^{-1} = \alpha' - \beta' i - \gamma' j - \delta' ij$

$$ts t^{-1} = s + 2[(\gamma\delta' - \delta\gamma')i + (\beta\delta' - \delta\beta')j + (\beta\gamma' - \gamma\beta')ij] \times (\alpha' - \beta' i - \gamma' j - \delta' ij).$$

En écrivant que les coefficients de β et δ sont égaux ou que celui de γ est nul, on a une équation du second degré à deux inconnues et en plus l'équation

$$\beta'^2 + \gamma'^2 - \delta'^2 = 1;$$

le problème que nous voulons résoudre admettra donc en général des solutions.

Il est bon d'ailleurs d'observer que la substitution $ts t^{-1}$ et s ont même partie numérique.

Note sur les quaternions.

Considérons la substitution de déterminant un

$$a z_{11} + b z_{12} + c z_{21} + d z_{22} = s.$$

Si l'on pose

$$i = (z_{12} + z_{21})\sqrt{-1}, \qquad j = (z_{11} - z_{22})\sqrt{-1},$$

on aura

$$i^2 = -1, \qquad j^2 = -1, \qquad ij = -ji = k,$$

et la substitution se mettra sous la forme

$$\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k = s.$$

On aura

$$\alpha = \frac{a + \alpha}{2}, \qquad \gamma = \frac{a - \alpha}{2\sqrt{-1}},$$

$$\beta = \frac{b - c}{2\sqrt{-1}}, \qquad \delta = \frac{b - c}{2},$$

si α, β, γ, δ sont réels (a, b, c, d ne le seront pas) et la substitution s sera représentée par un quaternion unité. La théorie des quaternions met en évidence un certain nombre de groupes d'ordre fini et remarquables.

Si l'on se rappelle qu'un quaternion

$$\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k = \cos\theta + \nu \sin\theta,$$

où $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$, peut être représenté par un arc de grand cercle tracé, sur une sphère de rayon un, perpendiculairement au vecteur ν et que le produit de deux quaternions unités est représenté par la résultante des arcs qui représentent les facteurs, on voit que des substitutions de la nature de celles que nous considérons ne pourront former que des groupes finis ou continus. On obtient les groupes finis remarquables dont nous venons de parler en considérant les polyèdres réguliers inscrits dans la sphère unité. Les arcs de grand cercle qui joignent les sommets d'un même polyèdre régulier représentent des quaternions ou des substitutions formant un groupe fini.

[K2b]

SUR LE TRACÉ DE L'ANSE DE PANIER;

Par M. A. MANNHEIM.

Dans la séance du 18 février 1895, Resal a fait à l'Académie des Sciences une Communication ayant pour titre : *Sur la forme de l'intrados* (1) *des voûtes en anse de panier*.

L'anse de panier est une ligne, construite au moyen d'arcs de cercles tangents, dont la forme rappelle celle de l'ellipse, et que l'on prend à la place de cette courbe

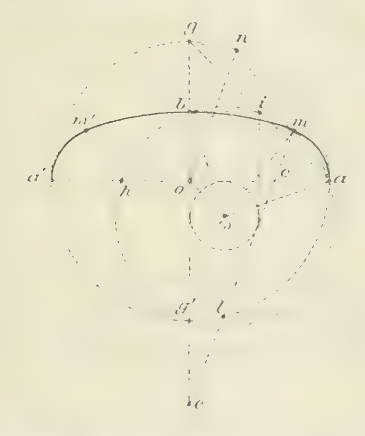
(1) L'intrados d'une voûte est la surface visible de cette voûte.

pour la section droite de la surface cylindrique qui forme l'intrados d'une voûte.

Resal rappelle que Huygens paraît être le premier qui se soit occupé du tracé de l'anse. On peut ensuite citer : Bossut, Bérard, Perronnet, Gauthey, K. Maingant, Montluisant, Michal, Revellat (¹), etc.

Je vais parler seulement de l'anse formée par la réunion de trois arcs de cercles.

Comme on le voit sur la figure, l'anse se compose d'un premier arc, dont le centre est c et qui est limité



au point m, puis d'un arc mbm', dont le centre e est à la rencontre de mc et de la perpendiculaire élevée à aa' de son milieu o; enfin d'un arc $a'm'$ symétrique de am par rapport à oe, qui aboutit au point a'.

Prenons le cercle inscrit au triangle oce. Le centre ω de ce cercle est à égales distances des points b et m, puisque eb et em sont des segments égaux; de même,

(¹) En 1873, dans les *Comptes rendus*, M. Revellat a donné la loi de formation des rayons des arcs au nombre de 11, employés par Perronnet pour le tracé de l'anse que cet habile ingénieur adopta pour les arches du pont de Neuilly.

il est à égales distances de m et de a, puisque cm et ca sont égaux. Il résulte de là que b, m, a appartiennent à une circonférence de cercle de centre ω. Ce centre est alors sur la perpendiculaire à ob, élevée du milieu de ce segment, et comme il est sur la bissectrice de l'angle eoc, il est bien déterminé, et par suite il en est de même de l'arc amb. Ainsi :

1. *Les points de contact, tels que m, des arcs que l'on peut employer pour former l'anse, appartiennent à l'arc de cercle amb* (¹).

Le cercle de centre ω, inscrit dans l'angle coe, est lui-même bien déterminé, par suite :

2. *La droite des centres ce des arcs de cercles que l'on peut employer pour former une anse est tangente à un cercle* (²).

Parmi les tangentes à ce cercle, il y en a une qui est parallèle à ob. Il lui correspond deux arcs dont l'un a un rayon infini et l'autre un rayon égal à ob. Il résulte de là que :

3. *La longueur du diamètre du cercle de centre ω, qui est inscrit dans l'angle coe, est égale à la différence des segments oa, ob.*

Ce cercle est donc facile à construire.

(¹) Ceci n'est qu'une partie d'un théorème, dont j'ai donné l'énoncé complet dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (séance du 23 avril 1897), théorème relatif à la courbe lieu des points où se touchent les cercles de deux séries : les uns, tangents entre eux en a et les autres tangents entre eux en b, comme les cercles qui forment l'anse.

(²) M. E. Rouché avait signalé à Resal cette propriété, dont il parle dans son cours au Conservatoire des Arts et Métiers.

Ces propriétés montrent que lorsque l'arc de cercle de centre ω, et qui passe par *a* et *b*, est tracé, on peut choisir le point de raccordement *m*. On mène ensuite de ce point une tangente *mce* au cercle de centre ω et inscrit dans l'angle *eoc*, de façon que ce cercle soit inscrit dans le triangle *coe*; cette tangente étant déterminée, les centres *c*, *e* le sont aussi, et les arcs de l'anse ont pour rayons *cm*, *em*.

Le tracé d'une anse est ainsi très simple.

Sur *aa'* comme diamètre décrivons une circonférence de cercle et prenons le point de rencontre *n* de cette courbe avec la droite *am*. Menons le rayon *on*. Les triangles *mca*, *noa* sont isoscèles : la droite *mc* est alors parallèle à *no*. Les triangles *gon*, *bem* étant isoscèles, la droite *bm* est parallèle à *gn*. On voit donc que :

On obtient le point de raccordement m sur une droite arbitraire am en prenant le point de rencontre de cette droite avec la parallèle bm à gn. De ce point m on mène ensuite la droite mce parallèlement à no et l'on obtient sur oa et ob les centres c, e des arcs de rayons cm, em, qui forment l'anse ([1]).

Je vais montrer qu'il est facile de retrouver les propriétés précédentes en faisant usage de ce tracé.

Lorsque *an* tourne autour de *a*, *le point m reste sur un cercle qui passe par a et b*, puisque l'angle *bma* est égal à l'angle *gna* qui est constant. On a ainsi le théorème 1.

Lorsque la droite *an* coïncide avec *ag'*, le point *m*

([1]) Huygens avait indiqué ce tracé dans le cas où le point *n* est l'extrémité du côté *an* de l'hexagone régulier inscrit dans la circonférence décrite sur *aa'* comme diamètre.

vient en g', donc *le centre* ω *du cercle amb est sur la bissectrice de l'angle* $g'oa$.

Lorsque an coïncide avec ag le point m vient en i, à une distance bi de b égale à bg : donc *la distance du centre* ω *à* og' *est égale à* $\frac{og - ob}{2}$ *ou* $\frac{oa - ob}{2}$.

Les cordes lm, ah, étant également inclinées sur am, sont égales : donc, *pour un point arbitraire m du cercle amb la distance de* ω *à* ml *est constante*; ceci n'est autre chose que le théorème 2.

D'après ce qui précède *cette distance constante est égale à* $\frac{oa - ob}{2}$; ceci est le théorème 3.

On voit que de cette manière, ou en employant le premier mode de démonstration, on arrive très simplement aux propriétés géométriques relatives à l'anse de panier et qui en rendent le tracé commode.

[O6ad]

DES CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES POUR QU'UNE SURFACE D'ORDRE QUELCONQUE SOIT DE RÉVOLUTION;

PAR M. S. MANGEOT,
Docteur ès Sciences.

Je suppose que l'on veuille avoir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface S, autre qu'un système de plans parallèles ou de sphères concentriques, représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation entière de degré m et à coefficients réels

$$f(x, y, z) = f_m(x, y, z) + f_{m-1}(x, y, z) + \ldots + f_0(x, y, z) = 0,$$

où $f_n(x, y, z)$ désigne le groupe des termes de degré n,

soit une surface de révolution, et, quand ces conditions sont remplies, connaître la position de l'axe de révolution de la surface.

J'ai déjà donné une solution de ce problème [1]. Je vais en donner ici une autre solution, qui m'a été fournie par la comparaison du polynome $f(x, y, z)$ avec la fonction entière (de même degré) du premier membre de l'équation d'un plan et du premier membre de l'équation d'une sphère.

Je puis admettre que le premier groupe $f_m(x, y, z)$ du polynome $f(x, y, z)$ n'est pas une puissance d'une forme linéaire P, puisqu'alors si le premier, f_h, des groupes suivants qui n'est pas, à un facteur constant près, une puissance de P, était une puissance d'une autre forme linéaire, la surface S ne pourrait pas être de révolution, et, dans le cas contraire, cette surface serait de révolution en même temps et autour de la même droite (droite normale au plan $P = 0$) que la surface représentée par l'équation

$$f_h + f_{h-1} + \ldots + f_0 = 0.$$

Je réserve, pour le traiter plus loin, le cas où $f_m(x, y, z)$ serait, à un facteur constant près, une puissance de $x^2 + y^2 + z^2$.

Soient $\varphi(y, z) + x\varphi_1(y, z)$, $\psi(z, x) + y\psi_1(z, x)$, $\chi(x, y) + z\chi_1(x, y)$ les sommes formées par les deux premiers termes du polynome homogène $f_m(x, y, z)$ ordonné suivant les puissances croissantes de x, puis de y, puis de z. Si deux des trois formes $\varphi(y, z)$, $\psi(z, x)$, $\chi(x, y)$ sont identiques [2], la surface S n'est

---

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, mai 1897.

(2) J'entends, partout, le mot *identique* dans le sens de *identique à zéro*.

pas de révolution; et si une seule est identique, par exemple la première, la surface ne peut être de révolution qu'autour d'une parallèle à l'axe des x. Je suppose qu'aucune de ces trois formes ne soit identique.

1° Lorsque deux des trois formes $\varphi_1(y, z)$, $\psi_1(z, x)$, $\chi_1(x, y)$ sont identiques, la surface n'est pas de révolution quand m est impair, et, quand m est pair, il faut, pour qu'elle soit de révolution, que la troisième forme soit identique aussi, et que l'une des trois fonctions $\varphi(y, z)$, $\psi(z, x)$, $\chi(x, y)$, et une seule, la première par exemple, soit, à un facteur constant près, une puissance de la somme des carrés des deux variables qu'elle renferme : alors on peut affirmer que, si la surface est de révolution, son axe est parallèle à l'axe des x.

2° Quand deux des trois formes $\varphi_1(y, z)$, $\psi_1(z, x)$, $\chi_1(x, y)$ ne sont pas identiques, soient $\varphi_1(y, z)$ l'une de celles qui ne le sont pas; $\varphi_1^{(p)}(1, t)$ la première des fonctions de t

$$\varphi_1^{(0)}(1, t) = \varphi_1(1, t), \quad \varphi_1'(1, t), \quad \varphi_1''(1, t), \quad \varphi_1'''(1, t), \quad \ldots$$

qui ne s'annule pas pour la valeur $t = i$, et $\varphi^{(q)}(1, t)$ la première des fonctions

$$\varphi^{(0)}(1, t) = \varphi(1, t), \quad \varphi'(1, t), \quad \varphi''(1, t), \quad \varphi'''(1, t), \quad \ldots$$

qui ne s'annule pas pour cette même valeur $t = i$. Si l'on a $p \gtrless q$, la surface n'est pas de révolution. Si $p = q$, on peut affirmer que la surface ne peut être de révolution qu'autour d'une parallèle à la droite réelle du plan imaginaire

$$y - iz = (m - 2p)\frac{\varphi^{(p)}(1, i)}{\varphi_1^{(p)}(1, i)}\,x,$$

droite qui n'est pas confondue avec l'un des axes de coordonnées.

Ainsi les six fonctions $\varphi(y, z)$, $\psi(z, x)$, $\chi(x, y)$,

$\varphi_1(x, y)$, $\psi_1(z, x)$, $\chi_1(x, y)$, traitées comme je viens de le dire, conduiront, soit à conclure que la surface S ne peut pas être de révolution, soit à la connaissance d'une direction $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ telle que la surface S ne peut être de révolution qu'autour d'une parallèle à cette direction.

Dans ce dernier cas, et supposant, afin de fixer les idées, α différent de zéro (soit $\alpha = 1$), pour que la surface S soit de révolution il faudra et il suffira :

1° Qu'aucune des deux formes $\chi(x, y)$, $\psi(z, x)$ ne soit identique et que les exposants k et k' des plus hautes puissances de $\alpha x + \beta y$ et de $\alpha x + \gamma z$ (formes linéaires connues) qui entrent respectivement en facteur dans ces deux formes soient égaux et de la même parité que m, en étant inférieurs à m;

2° Que, si k n'est pas nul, en appelant $2m'$ le plus grand nombre pair contenu dans m et posant

$$\varphi_{n+1}(x, y) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{m'-n}\varphi_n(x, y) - (x^2 + y^2)^{m'-n}\varphi_n(\beta, -\alpha)}{(\alpha^2 - \beta^2)^{m'-n}(\alpha x - \beta y)^2},$$

$$\omega_{n+1}(x, z) = \frac{(\alpha^2 - \gamma^2)^{m'-n}\omega_n(x, z) - (x^2 + z^2)^{m'-n}\omega_n(\gamma, -\alpha)}{(\alpha^2 - \gamma^2)^{m'-n}(\alpha x - \gamma z)^2},$$

les fonctions définies, quand k est pair, par les symboles

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{f_{m-1}(x, y, 0)}{\alpha x + \beta y}, & \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \ldots, \quad \varphi_{\frac{k}{2}}, \\ \omega_1 = \dfrac{f_{m-1}(x, 0, z)}{\alpha x - \gamma z}, & \omega_2, \quad \omega_3, \quad \ldots, \quad \omega_{\frac{k}{2}}, \end{cases}$$

et, quand k est impair, par les symboles

$$\begin{cases} \varphi_0 = f_{m-1}(x, y, 0), & \varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{\frac{k-1}{2}}, \\ \omega_0 = f_{m-1}(x, 0, z), & \omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{\frac{k-1}{2}}, \end{cases}$$

soient des polynomes entiers [1];

---

[1] Chacun des symboles φ_1, φ_2, ..., ω_1, ω_2, ... a deux significations différentes suivant que k est pair ou impair.

3° Que, si l'on représente par $U(x, y)$, $V(x, z)$ les deux polynomes entiers $(\alpha x+\beta y)\varphi_{\frac{k}{2}-1}$, $(\alpha x+\gamma z)\omega_{\frac{k'}{2}-1}$, quand k est pair ou nul, et ceux-ci $(\alpha x-\beta y)\varphi_{\frac{k-1}{2}}$, $(\alpha x+\gamma z)\omega_{\frac{k+1}{2}}$, quand k est impair, et par $\chi_0(x, y)$, $\psi_0(x, z)$ les deux polynomes entiers

$$\frac{\chi(x, y)}{(\alpha x-\beta y)^k}, \quad \frac{\psi(z, x)}{(\alpha x+\gamma z)^{k'}},$$

les coefficients des termes de la fonction entière

$$F(x, y, z)=\begin{vmatrix} x-x' & y-y' & z-z' \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix},$$

où l'on fait

$$x'=0, \qquad y'=\frac{(\alpha^2+\beta^2)U(\beta, -\alpha)}{\alpha(m-k)\chi_0(\beta, -\alpha)},$$

$$z'=\frac{(\alpha^2+\gamma^2)V(\gamma, -\alpha)}{\alpha(m-k)\psi_0(\gamma, -\alpha)},$$

soient tous nuls ([1]).

L'axe de révolution de la surface S sera la droite définie par les équations

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y-y'}{\beta}=\frac{z-z'}{\gamma} \quad ([2]).$$

Quand la surface S est d'ordre pair, on peut, en con-

([1]) Les nombres k, k', $\chi_0(\beta, -\alpha)$, $\psi_0(\gamma, -\alpha)$, dont les deux derniers sont différents de zéro, peuvent être obtenus sans effectuer de divisions, par l'emploi des dérivées relatives à x de chacune des formes $\chi(x, y)$, $\psi(z, x)$.

([2]) Pour que le cône $f_m(x, y, z)=0$ soit une surface de révolution, il faut et il suffit que l'on ait

$$\alpha\left(y\frac{\partial f_m}{\partial z}-z\frac{\partial f_m}{\partial y}\right)+\beta\left(z\frac{\partial f_m}{\partial x}-x\frac{\partial f_m}{\partial z}\right)+\gamma\left(x\frac{\partial f_m}{\partial y}-y\frac{\partial f_m}{\partial x}\right)=0,$$

α, β, γ étant déterminés comme il a été dit : son axe est la droite $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$.

séquence de ce qui précède, formuler cette proposition :

Lorsque, *ce qui est le cas général*, la constante $\varphi(1, i)\varphi_1(1, i)$ n'est pas nulle, et que, en représentant les deux quantités réelles

$$\frac{m}{2}\left[\frac{\varphi(1, i)}{\varphi_1(1, i)} - \frac{\varphi(1, -i)}{\varphi_1(1, -i)}\right], \qquad \frac{m}{2i}\left[\frac{\varphi(1, i)}{\varphi_1(1, i)} - \frac{\varphi(1, -i)}{\varphi_1(1, -i)}\right],$$

par A et B, les deux constantes $\chi(A, -1)$, $\psi(-1, B)$ sont elles-mêmes différentes de zéro, si l'on pose

$$C = \frac{(A^2 - 1) f_{m-1}(A, -1, 0)}{m\,\chi(A, -1)};$$

$$D = \frac{(B^2 - 1) f_{m-1}(B, 0, -1)}{m\,\psi(-1, B)},$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour que la surface S soit de révolution, m étant pair, sont que les coefficients de tous les termes du polynome entier

$$\begin{vmatrix} x & y - C & z - D \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ 1 & A & B \end{vmatrix}$$

soient nuls, et les équations de l'axe de révolution sont

$$y - C = Ax, \qquad z - D = Bx.$$

Cas où le groupe $f_m(x, y, z)$ est de la forme $a(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{m}{2}}$. — Soient, en conservant les notations précédentes, $\varphi(y, z) + x\varphi_1(y, z)$, $\psi(z, x) + y\psi_1(z, x)$, $\chi(x, y) + z\chi_1(x, y)$ les sommes formées par les deux premiers termes du second groupe homogène,

$$f_{m-1}(x, y, z),$$

ordonné suivant les puissances croissantes de x, puis de y, puis de z. Je suppose d'abord que l'on n'ait pas à la

fois

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi_1(y, z) = \lambda(y^2 + z^2)^{\frac{m}{2}-1}, \\ \psi_1(z, x) = \mu(z^2 + x^2)^{\frac{m}{2}-1}, \\ \chi_1(x, y) = \nu(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}-1}, \end{cases}$$

λ, μ, ν étant des constantes qui peuvent être nulles. J'admets, par exemple, que $\varphi_1(y, z)$ n'est pas de la forme $\lambda(y^2+z^2)^{\frac{m}{2}-1}$. En définissant la dérivée d'ordre o d'une fonction comme étant cette fonction elle-même, soit p l'ordre de la première des dérivées de la fonction non identique $\varphi_1(1, t)$ qui ne s'annule pas pour $t = i$. Si le polynome $\varphi(1, t)$ est identique, ou si la première de ses dérivées qui ne s'annule pas pour $t = i$ (y compris celle d'ordre o) est d'ordre différent de p, la surface S n'est pas de révolution. Dans l'hypothèse contraire, la surface ne peut être de révolution qu'autour d'une parallèle à la droite réelle $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ ($\alpha = 1$) du plan imaginaire

$$y - iz = (m - 2p - 1)\frac{\varphi^{(p)}(1, i)}{\varphi_1^{(p)}(1, i)}x,$$

droite qui ne coïncide pas avec un axe de coordonnées. Pour qu'elle soit d'ailleurs de révolution, il faut et il suffit que le polynome $F(x, y, z)$ soit identiquement nul quand on y fait

$$x' = 0, \qquad y' = \frac{f_{m-1}(\beta, -\alpha, 0)}{m a \alpha(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{m}{2}-1}}, \qquad z' = \frac{f_{m-1}(\gamma, 0, -\alpha)}{m a \alpha(\alpha^2 + \gamma^2)^{\frac{m}{2}-1}},$$

et les équations de l'axe sont $\frac{x}{\alpha} = \frac{y - y'}{\beta} = \frac{z - z'}{\gamma}$, avec ces valeurs de y' et z'.

Je me place maintenant dans l'hypothèse où les trois

identités (1) auraient lieu ([1]). Ici la surface S ne peut être de révolution qu'autour d'une droite passant par le point $\left(-\frac{\lambda}{ma}, -\frac{\mu}{ma}, -\frac{\nu}{ma}\right)$: c'est là un premier résultat. Je considère alors les trois formes

$$\varphi(y, z) = (\mu y - \nu z)(y^2 + z^2)^{\frac{m}{2}-1},$$

$$\psi(z, x) = (\nu z - \lambda x)(z^2 + x^2)^{\frac{m}{2}-1},$$

$$\chi(x, y) = (\lambda x - \mu y)(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}-1}.$$

Si aucune d'elles n'est identique, ou que deux d'entre elles soient identiques, et deux seulement, la surface n'est pas de révolution. Quand une seule est identique, par exemple la première, la surface ne peut être de révolution qu'autour d'une parallèle à l'axe des x, la droite $may + \mu = 0$, $maz + \nu = 0$; et la condition pour qu'elle soit de révolution est

$$(may + \mu) f'_z = (maz + \nu) f'_y.$$

Lorsque les trois formes sont identiques, je puis, pour l'objet que j'ai en vue, substituer au polynome donné $f(x, y, z)$, le polynome suivant

$$f_{(1)}(x, y, z) = f(x, y, z) - a\left[\left(x + \frac{\lambda}{ma}\right)^2 + \left(y + \frac{\mu}{ma}\right)^2 + \left(z + \frac{\nu}{ma}\right)^2\right]^{\frac{m}{2}}.$$

En effet, dans les conditions actuelles, pour que la surface S soit de révolution, il faut et il suffit que $f_{(1)}(x, y, z)$ ait son degré m_1 inférieur à $m - 1$, et que la surface S_1 correspondant à l'équation $f_{(1)}(x, y, z) = 0$ soit elle-même de révolution autour d'une droite passant par le point $\left(-\frac{\lambda}{ma}, -\frac{\mu}{ma}, -\frac{\nu}{ma}\right)$; et les axes de

([1]) Si deux de ces identités sont vérifiées, la troisième doit l'être aussi pour que la surface soit de révolution.

révolution des deux surfaces S, S_1 seront confondus. Je suis alors conduit, en supposant $m_1 < m - 1$, à appliquer les méthodes précédentes à la surface S_1.

Je prends, à cet effet, dans le polynome $f_{(1)}$, les deux premiers groupes homogènes f_{m_1}, f_{m_1-1}, ceux formés par les termes de degrés m_1 et $m_1 - 1$. J'admets d'abord que ces groupes ne satisfassent pas aux conditions particulières que je suppose actuellement remplies par les deux premiers groupes f_m, f_{m-1} de f, c'est-à-dire que l'on ne soit pas placé dans le cas où, f_{m_1} ayant la forme $a_1(x^2+y^2+z^2)^{\frac{m_1}{2}}$, les coefficients de x, de y, de z, dans le polynome f_{m_1-1}, auraient les formes

$$\lambda_1(y^2+z^2)^{\frac{m_1}{2}-1},$$

$$\mu_1(z^2+x^2)^{\frac{m_1}{2}-1},$$

$$\nu_1(x^2+y^2)^{\frac{m_1}{2}-1},$$

tandis que les parties indépendantes de x, de y, de z, dans ce polynome f_{m_1-1}, seraient elles-mêmes

$$(\mu_1 y+\nu_1 z)(y^2+z^2)^{\frac{m_1}{2}-1},$$

$$(\nu_1 z+\lambda_1 x)(z^2+x^2)^{\frac{m_1}{2}-1},$$

$$(\lambda_1 x+\mu_1 y)(x^2+y^2)^{\frac{m_1}{2}-1}.$$

Je fais alors sur $f_{(1)}$ les mêmes opérations et discussion que celles que je faisais tout à l'heure sur f, en me dispensant, dans tous les cas, des calculs analogues à ceux où j'introduisais les nombres appelés α, β, γ [1]. Elles

---

[1] C'est-à-dire que : si f_{m_1} n'est pas de la forme $a_1(x^2+y^2+z^2)^{\frac{m_1}{2}}$, je discute et traite f_{m_1} comme je le faisais pour f_m au cinquième alinéa de cette Note ; et si f_{m_1} est de cette forme, je discute et traite

m'amèneront, soit à reconnaître que la surface S_1 n'est pas de révolution, et alors il en sera de même de S ; soit à trouver une direction $\frac{x}{\alpha_1} = \frac{y}{\beta_1} = \frac{z}{\gamma_1}$ telle que S_1 ne peut être de révolution qu'autour d'une parallèle à cette direction. Alors la surface S ne pourra être de révolution qu'autour de la droite

$$\frac{max - \lambda}{\alpha_1} = \frac{may - \mu}{\beta_1} = \frac{maz - \nu}{\gamma_1},$$

et le problème se trouvera résolu, les conditions pour que cette surface soit de révolution étant que le polynome $F(x, y, z)$ soit identiquement nul quand on y remplace les lettres α, β, γ par α_1, β_1, γ_1 et x', y', z' par $-\frac{\lambda}{ma}$, $-\frac{\mu}{ma}$, $-\frac{\nu}{ma}$, et, si l'on veut aussi, f par f_1.

Je suppose maintenant que l'on soit placé dans le cas particulier que je viens de réserver au sujet de $f_{(1)}$. Si les trois différences

$$\frac{\lambda}{ma} - \frac{\lambda_1}{m_1 a_1}, \quad \frac{\mu}{ma} - \frac{\mu_1}{m_1 a_1}, \quad \frac{\nu}{ma} - \frac{\nu_1}{m_1 a_1}$$

ne sont pas nulles ensemble, la surface S ne peut être de révolution qu'autour d'une parallèle à la direction $\frac{x}{\alpha_1} = \frac{y}{\beta_1} = \frac{z}{\gamma_1}$, qui est la droite

$$\frac{max - \lambda}{\alpha_1} = \frac{may - \mu}{\beta_1} = \frac{maz - \nu}{\gamma_1},$$

et la question sera encore terminée. Si ces trois différences sont nulles, je puis remplacer, à son tour, le

$f_{(n)}$ comme je le faisais pour $f_{(n-1)}$ dans les passages suivants de cette Note : dixième alinéa jusqu'aux mots *axe de coordonnées* et onzième alinéa jusqu'aux mots *l'axe des x*.

polynome $f_{(1)}(x, y, z)$ par le suivant

$$f_{2}(x, y, z) = f_{1}(x, y, z) \\ - a_1\left[\left(x + \frac{\lambda}{ma}\right)^2 + \left(y + \frac{\mu}{ma}\right)^2 + \left(z + \frac{\nu}{ma}\right)^2\right]^{\frac{m_1}{2}}.$$

Car, pour que S soit de révolution, il est nécessaire et suffisant que $f_{(2)}(x, y, z)$ ait son degré m_2 inférieur à $m_1 - 1$ et que la surface qui a l'équation

$$f_2(x, y, z) = 0$$

soit de révolution autour d'une droite passant par le point $\left(-\frac{\lambda}{ma}, -\frac{\mu}{ma}, -\frac{\nu}{ma}\right)$, droite qui coïncidera avec l'axe de révolution de S. Si m_2 est plus petit que $m_1 - 1$, je ferai sur le polynome $f_{(2)}$ les opérations que j'indiquais précédemment au sujet de $f_{(1)}$.

Si les circonstances dans lesquelles j'ai remplacé $f_{(1)}$ par $f_{(2)}$ venaient encore à se produire pour le polynome $f_{(2)}$, je remplacerais à son tour $f_{(2)}$ par un polynôme $f_{(3)}$ déduit de $f_{(2)}$ comme $f_{(2)}$ était déduit de $f_{(1)}$, et ainsi de suite. En continuant de la sorte, je finirai par obtenir un polynome $f_{(r)}(x, y, z)$, qui, traité de la façon que j'indiquais tout à l'heure pour $f_{(1)}$, conduira, soit à cette conclusion que la surface S n'est pas de révolution, soit à la connaissance d'une direction $\frac{x}{\alpha_r} = \frac{y}{\beta_r} = \frac{z}{\gamma_r}$ telle que la surface S ne peut être de révolution qu'autour d'une droite ayant cette direction, et, par conséquent, qu'autour de la droite

$$\frac{max + \lambda}{\alpha_r} = \frac{may + \mu}{\beta_r} = \frac{maz + \nu}{\gamma_r};$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle soit de révolution seront d'ailleurs que les coefficients des

termes du polynome

$$\begin{vmatrix} max + \lambda & may + \mu & maz + \nu \\ \frac{\partial f_r}{\partial x} & \frac{\partial f_r}{\partial y} & \frac{\partial f_r}{\partial z} \\ \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \end{vmatrix}$$

soient tous nuls.

Remarque I. — Sachant que la surface S ne peut être de révolution qu'autour d'une droite parallèle à une direction connue, on peut résoudre le problème proposé en rapportant la surface à trois axes de coordonnées dont l'un coïncide avec cette direction, et appliquant la proposition suivante :

Pour que, en coordonnées rectangulaires, une équation entière $\Sigma Z^n \Phi_n(X, Y) = 0$ représente une surface de révolution autour d'une parallèle à l'axe des Z, il est nécessaire et suffisant que $MX^h + NY^h + \ldots$ étant la somme des termes de degré le plus elevé, h, dans l'un des polynomes $\Phi_n(X, Y)$ pris à volonté, et

$$M_1 X^{h-1} + N_1 Y^{h-1} \ldots$$

la somme des termes de degré $h - 1$ de ce polynome, chacune des expressions $\Phi_n\left(X + \frac{M_1}{hM}, Y + \frac{N_1}{hN}\right)$ soit une fonction de $X^2 + Y^2$; et l'axe de révolution de la surface est la droite

$$hMX + M_1 = 0, \qquad hNY + N_1 = 0.$$

Remarque II. — Sachant que la surface S ne peut être de révolution qu'autour d'une droite passant par un point connu (x_0, y_0, z_0), on peut résoudre la question posée en opérant comme il suit :

On prend, à volonté, l'un des groupes homogènes dont la somme est $f(x + x_0, y + y_0, z + z_0)$, qui ne

soit pas, à un facteur constant près, une puissance parfaite de $x^2+y^2+z^2$. L'équation obtenue en annulant ce groupe définit un cône qui, si la surface S est de révolution, doit être de révolution autour d'une parallèle à son axe. En traitant ce groupe comme je traitais $f_m(x, y, z)$ au cinquième alinéa de cette Note, on sera conduit, soit à conclure que le cône n'est pas de révolution, et alors il en sera de même de S; soit à trouver une droite $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$ telle que le cône ne peut être de révolution qu'autour de cette droite (ou d'une parallèle à cette droite), et alors la surface S ne pourra être de révolution qu'autour de la droite

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma};$$

les conditions pour qu'elle soit de révolution étant d'ailleurs que $F(x, y, z)$ soit identiquement nul pour $x'=x_0$, $y'=y_0$, $z'=z_0$.

[Dans les deux cas, $f_m(x, y, z)$ peut être une puissance d'une forme linéaire.]

[D1d]

SUR LES SYMBOLES $\frac{0}{0}$ A PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES;

Par M. Léon AUTONNE.

I. — Préliminaires.

Soit X une fonction de x qui, pour $x=0$ par exemple, prend la forme $\frac{0}{0}$. Pour $|x|$ assez petit, on a $X=P_1(x):P_0(x)$ avec $P_1(0)=P_0(0)=0$. *On con-*

vient que la valeur X_0 de X pour $x = 0$ est la limite vers laquelle tend X quand x tend vers zéro. Si P_1 et P_0 pour $|x|$ assez petit se développent en séries de Taylor, des règles bien connues donnent X_0. Si X dépend de r variables distinctes $x, y, z, \ldots$ avec

$$X = \frac{P_1(x, y, z, \ldots)}{P_0(x, y, z, \ldots)} \quad P_1(0, 0, \ldots) = P_0(0, \ldots) = 0,$$

on peut encore convenir que X_0 est la limite de X quand $|x|, |y|, |z|, \ldots$ tendent vers zéro. Seulement X_0 n'est plus unique et change avec la loi de décroissance simultanée des modules. Si P_1 et P_0 sont régulières, on peut (Weierstrass) obtenir pour X_0 tout nombre pris arbitrairement à l'avance.

Mais considérons N fonctions $X_i = P_i : P_0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $N \geq r$, avec $P_i(0, \ldots) = P_0(0, \ldots) = 0$. Les X_{i0} ne sont plus *simultanément* arbitraires. Si l'on s'en donne quelques-unes, les autres s'en déduisent. Je pose alors le problème suivant :

Connaître tous les systèmes de valeurs-limites vers lesquelles tendent simultanément les rapports des P, quand les r variables tendent vers zéro de toutes les façons.

Une terminologie géométrique est commode. Dans un espace E_N à N dimensions, prenons les N + 1 coordonnées homogènes ξ d'un point ξ, $j = 0, 1, 2, \ldots, N$; considérons les $x, y, z, \ldots$ comme les coordonnées d'un point ξ dans un E_r. ξ et ζ sont liées par les relations

$$\rho\xi_j = P_j(x, y, z), \qquad \rho = \text{facteur de proportionnalité},$$
$$P_j(0, 0, \ldots) = 0.$$

Quand ζ tend vers le point $0\,|x = y = z = \ldots = 0|$ suivant un certain *itinéraire* ϖ, ξ tend vers une posi-

tion limite ξ, de coordonnées $\overline{\xi}_j$, *fournie* par $\mathfrak{P}$. Le problème est alors de *construire la figure* Ω_r *de* E_N, *lieu des points* $\overline{\xi}$, *fournis par tous les itinéraires possibles.*

Grâce aux magistrales recherches de Weierstrass sur les séries entières à plusieurs variables, on peut parvenir au but ([1]). La solution complète exige trop d'explications préliminaires pour être exposée ici ; mais, dans le cas particulier ci-après, qui se laisse traiter d'une façon directe et très facile, on retrouve la méthode et les principales circonstances du procédé général.

II. — Construction d'une figure Ω.

Soient, pour $N = r = 2$, $j = 0, 1, 2$,

$$\rho\xi_j = f_j(y) = c_j y^2 - 2A_j y + B_j,$$

$$A_j = a_j x^\alpha + x^{\alpha-1}(\ldots), \qquad \alpha, \beta = \text{entiers},$$

$$B_j = b_j x^\beta + x^{\beta-1}(\ldots). \qquad A_j, B_j = \text{holomorphes en } x;$$

les neuf constantes a_j, b_j, c_j sont *quelconques* sans aucune relation particulière entre elles.

Quand y varie seul, ξ décrit dans le plan E_2 une conique Γ, dont l'équation s'obtient en éliminant ρ et y.

([1]) Le lecteur désireux d'approfondir la matière peut se reporter à mes autres publications.

Comptes rendus : Sur les variétés unicursales à deux dimensions (11 novembre 1895).

Sur les variétés unicursales à trois dimensions (9 et 30 décembre 1895).

Sur les pôles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes (18 janvier 1897).

Rendiconti du Cercle mathématique de Palerme, 1896.

Sur les pôles des fonctions uniformes à deux variables indépendantes.

Acta mathematica : Sur les pôles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes (à paraître).

Posons, l_j, m_j, n_j étant neuf quantités quelconques,

$$\begin{vmatrix} l_0 & l_1 & l_2 \\ m_0 & m_1 & m_2 \\ n_0 & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = (lmn), \qquad \ldots;$$

le meilleur procédé d'élimination (Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*, traduction A. Benoist, t. III, p. 292) est d'annuler le discriminant $P(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ du polynome quadratique en y

$$U(y) = \left(\xi f \frac{\partial f}{\partial y}\right) = y^2(\xi A c) + y(\xi B c) + (\xi B A),$$

d'où l'équation de Γ

$$P = (\xi B c)^2 - 4(\zeta A c)(\xi B A) = 0.$$

Sous le bénéfice de $P = 0$, l'équation $U(y) = 0$ a une racine double y, $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$, d'où

$$(1) \qquad -y = \frac{(\xi B c)}{2(\xi A c)} = \frac{2(\xi B A)}{(\xi B c)} = \left[\frac{(\xi B A)}{(\xi A c)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pour chaque valeur de x et de y, ξ est donné par l'intersection de la conique Γ avec une des droites (1). Quand x est infiniment petit, ξ tend vers un certain point de la courbe $\bar{\Gamma}$ limite de Γ. *La figure Ω_2 est située tout entière sur la courbe* Γ.

Démontrons la réciproque : *un point quelconque μ, de coordonnées μ_j*, de Γ est sur Ω_2.

Supposons μ déterminé par l'intersection de Γ avec la droite q, $q_0\xi_1 - q_1\xi_0 = 0$, $q_1 : q_0 = \mu_1 : \mu_0 =$ quelconque. Soit λ un point où q coupe Γ; l'équation $P(\lambda) = 0$ exprime qu'il existe au moins une racine η commune aux deux équations

$$\frac{f_0(y)}{\lambda_0} = \frac{f_1(y)}{\lambda_1} = \frac{f_2(y)}{\lambda_2}$$

ou aux trois équations

$$[ij], \qquad \lambda_i f_j(y) - \lambda_j f_i(y) = 0, \qquad i, j = 0, 1, 2,$$

savoir

$$(\lambda_i c_j - \lambda_j c_i) y^2 + (\lambda_i A_j - \lambda_j A_i) y + \lambda_i B_j - \lambda_j B_i = 0.$$

Pour x infiniment petit, *le point* λ *étant distinct du point* c, les deux racines de $[ij]$ sont infiniment petites et η_1 est sûrement infiniment petit. x et η_1 s'annulent à la fois.

Cela posé, construisons un itinéraire $\mathfrak{W}$ qui fournisse μ. Prenons $y = \eta_1(\lambda, x)$. x variant, λ varie, mais sans pouvoir quitter ni la conique Γ ni la droite q. A la limite, λ, qui coïncide avec ξ, vient sur $\bar{\Gamma}$ sans avoir pu quitter q; donc λ ou ξ vient en μ. C. Q. F. D.

Bref, Ω_2 est la conique $\bar{\Gamma}$.

On a

$$(\xi Bc) = x^{\beta}(\xi bc) + x^{\beta+1}(\ldots),$$
$$(\xi Ac) = x^{\alpha}(\xi ac) + x^{\alpha+1}(\ldots),$$
$$(\xi AB) = x^{\alpha+\beta}(\xi ab) + x^{\alpha+\beta+1}(\ldots).$$

Pour obtenir $\bar{\Gamma}$, il suffit de chercher la limite de la conique, après départ du facteur x^{β},

$$(2) \qquad x^{\beta}(\xi bc)^2 - 4x^{2\alpha}(\xi ac)(\xi ab) = 0.$$

Pour y, il vient

$$(3) \qquad y = x^{\beta-\alpha}\left[-\frac{(\xi bc)}{2(\xi ac)} + x(\ldots)\right],$$

$$(4) \qquad = x^{\alpha}\left[-\frac{2(\xi ba)}{(\xi bc)} + x(\ldots)\right],$$

$$(5) \qquad = x^{\frac{1}{2}\beta}\left\{\left[\frac{(\xi ba)}{(\xi ac)}\right]^{\frac{1}{2}} + x(\ldots)\right\}.$$

formules qui permettent, un point $\bar{\xi}$ étant pris sur $\bar{\Gamma}$, de construire un itinéraire fournissant $\bar{\xi}$.

Remarque. — On a expressément exclu de la démonstration précédente le cas où le point μ coïncide avec le point c, de coordonnées c_j. Mais il est très facile de construire un $\wp$ qui fournisse c. Posons $x = y^\sigma$, avec $2 < 1 + \sigma\alpha$ et $2 < \sigma\beta$; alors dans f_j tous les termes sont négligeables devant le terme $c_j y^2$. Il suffit donc de choisir l'exposant positif σ assez grand pour que l'itinéraire $\wp$, $x = y^\sigma$, fournisse c.

On construira par un raisonnement analogue des $\wp$ fournissant les points a et b.

III. — Discussion.

$\beta = 2\alpha$. — $\bar{\Gamma}$ est la conique

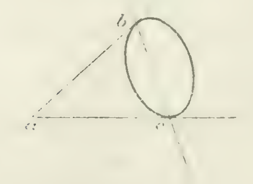
$$(\xi bc)^2 + 4(\xi ac)(\xi ab) = 0,$$

y est fourni par une quelconque des relations (3), (4) ou (5).

$\beta < 2\alpha$. — Γ est la droite double

$$(\xi bc)^2 = 0.$$

Fig. 1.

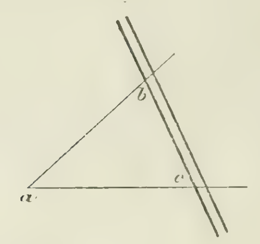


y est fourni par la relation (5)

$\beta > 2\alpha$. — $\overline{\Gamma}$ est la droite

$$(\xi ab) = 0.$$

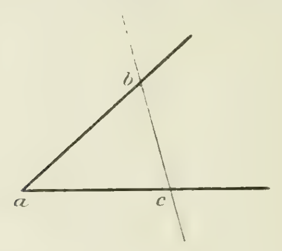
Fig. 2.



y est fourni par (3);

$$(\xi ac) = 0.$$

Fig. 3.



y est fourni par (4).

[R4aδ]

SUR L'ÉQUILIBRE DE LA VIS;

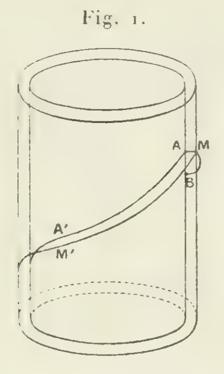
Par M. C. BOURLET.

Pour établir, élémentairement, les conditions d'équilibre de la vis, sans tenir compte du frottement, on fait, d'ordinaire, certaines hypothèses restrictives : on admet, par exemple, que le contact n'a lieu tout le long du fi-

let que suivant une hélice moyenne et l'on ne traite que les cas de la vis à filet carré ou à filet triangulaire. Toutes ces restrictions ne me paraissent pas nécessaires et voici une démonstration, aussi simple que celles qui ont cours, et qui s'en affranchit.

Soit AMB (*fig.* 1) la section du filet par un plan mé-

Fig. 1.



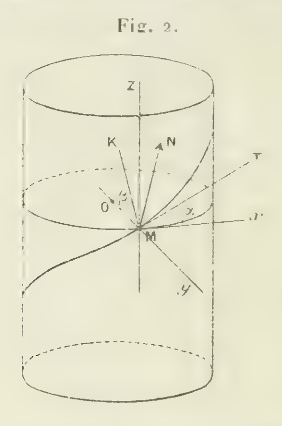
ridien du cylindre qui sert de noyau à la vis, section que je suppose de forme quelconque. Le filet de la vis est engendré par le profil AMB qui se déplace de façon que le point A décrive une hélice tracée sur le noyau, tandis que la droite AB reste parallèle à l'axe du cylindre et que le plan AMB reste normal au cylindre. Tout point M de ce profil décrit une hélice tracée sur un cylindre dont le rayon est différent de celui du noyau, mais toutes les hélices ainsi engendrées offrent la particularité d'avoir le *même pas* qui est le *pas de la vis*. Je désigne par h ce pas commun, par α l'angle que fait la tangente en un point quelconque de l'hélice, décrite par le point M, avec le plan d'une section droite du cylindre et par r le rayon du cylindre sur lequel cette hélice est tracée. On a toujours la relation

$$r \operatorname{tang} \alpha = \frac{h}{2\pi};$$

le produit r tang α est donc le même pour *toutes* les hélices tracées sur la surface du filet.

Ceci posé, soit M un point quelconque de cette surface. Je figure le cylindre sur lequel est tracée l'hélice qui passe en M (*fig.* 2). Soit Mx la tangente en M

Fig. 2.



au parallèle du cylindre qui passe en M, Mz la génératrice, My la normale au cylindre, MT la tangente à l'hélice de M. L'angle TMx est égal à α. Le plan tangent au point M à la surface du filet coupe le plan Mxz suivant MT; soit MK son intersection avec le plan Myz et désignons par β l'angle de MK avec la normale MO. L'équation du plan tangent TMK, par rapport au trièdre Mxyz, est, manifestement,

$$z - x \operatorname{tang}\alpha + y \operatorname{tang}\beta = 0.$$

Soit N la réaction normale du filet sur l'écrou au point M, X, Y, Z les composantes de cette réaction suivant Mx, My, Mz; la réaction N étant normale au plan KMT, on a

$$\frac{X}{-\operatorname{tang}\alpha} = \frac{Y}{\operatorname{tang}\beta} = \frac{Z}{1},$$

d'où

(1) $$X = -Z \operatorname{tang}\alpha.$$

Le moment de cette réaction par rapport à l'axe du cylindre sera donc

$$(2) \qquad rX = -rZ \tang \alpha = -\frac{h}{2\pi} Z.$$

Supposons maintenant que la vis soit soumise à une résistance P dirigée suivant l'axe du cylindre et à une puissance F parallèle au plan d'une section droite et agissant sur un bras de levier de longueur a. Écrivons les deux équations d'équilibre de la vis :

1° Que la somme des projections de toutes les forces sur l'axe du cylindre est nulle,

$$(3) \qquad P = \sum Z;$$

2° Que la somme des moments de toutes ces forces par rapport à cet axe est nulle,

$$aF = -\sum rX = \sum \frac{h}{2\pi} Z.$$

Comme $\frac{h}{2\pi}$ *est constant*, ceci s'écrit :

$$(4) \qquad aF = \frac{h}{2\pi} \sum Z.$$

Dans les deux équations (3) et (4) la somme $\sum$ est étendue à *toutes* les réactions N en *tous* les points du filet et $\sum Z$ a la même valeur des deux côtés. De ces deux équations on conclut, par suite, l'équation d'équilibre

$$aF = \frac{h}{2\pi} \cdot P,$$

qui, ainsi, se trouve établie dans toute sa généralité.

[O2e]

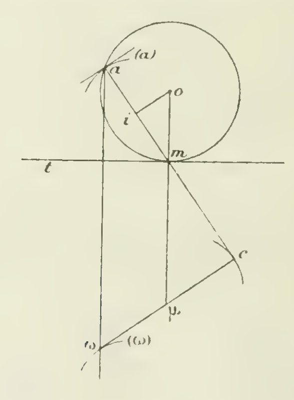
DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE PROPRIÉTÉ DE LA CYCLOIDE ;

Par M. André VICAIRE.

La courbe telle que la distance de chacun de ses points au centre de courbure correspondant de la développée soit constante est une cycloïde.

Cette propriété se trouve démontrée par l'Analyse dans les *Exercices de Calcul différentiel et intégral* de Tisserand (p. 252). On peut y arriver géométriquement de la façon suivante :

Soient c le centre de courbure de la courbe (a), ω celui de la développée (ω). Considérons le déplace-



ment de la droite de grandeur invariable $a\omega$. Le centre instantané est le point d'intersection des normales à (a) en a, à (ω) en ω. Il est donc à l'infini et $a\omega$ se déplace parallèlement à elle-même.

D'autre part, on sait, d'après un théorème de

M. Mannheim, que la normale en m, milieu de ac, au lieu décrit par ce point, s'obtient en joignant m à μ milieu de ωc. Le lieu de m a donc sa tangente parallèle à une direction fixe; c'est une droite mt perpendiculaire à $a\omega$.

Construisons un cercle tangent en m à mt et passant par a. Abaissons de son centre O la perpendiculaire Oi sur am. Les triangles Oim, $ac\omega$ sont semblables; et comme im est le quart de ac, Om rayon du cercle est donc le quart de la longueur constante $a\omega$.

Supposons que ce cercle de rayon constant se déplace en restant tangent à mt, de façon que a, point fixe de sa circonférence, décrive la courbe (a), ce qui est possible d'après ce qu'on vient de dire. Le centre instantané se trouve sur la normale au cercle, en m, point où ce cercle touche son enveloppe, et sur la normale am à la trajectoire de a. C'est donc m.

Le cercle étant le lieu des centres de rotation, dans la figure mobile, roule sans glisser, sur la droite mt, lieu des centres de rotation dans le plan fixe.

a décrit donc une cycloïde.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES. CONCOURS DE 1897.

Mathématiques élémentaires.

1° Les droites Δ qui sont coupées harmoniquement par deux cercles donnés C et C′ enveloppent une conique; montrer que cette conique reste la même lorsqu'on remplace les deux cercles C et C′ par deux autres respectivement concentriques aux précédents et tels que la somme des carrés des rayons des deux nouveaux cercles soit égale à la somme des carrés des rayons des deux premiers.

2° Trouver le lieu des centres des cercles S qui sont coupés harmoniquement par deux cercles donnés C et C′ et qui sont orthogonaux à un troisième cercle donné Γ. Ce lieu est une conique Σ dont on déterminera les directions asymptotiques et dont on discutera le genre en admettant que le centre de Γ se déplace d'une façon quelconque dans le plan, tandis que les cercles C et C′ restent fixes.

On montrera que la direction des axes de Σ ne dépend que des positions des centres des trois cercles donnés et nullement de leurs rayons.

3° Trouver le lieu du centre de la conique Σ dans les deux hypothèses suivantes : 1° on fait varier le rayon du cercle Γ en laissant fixes le centre de ce cercle et les deux cercles C et C′; 2° on laisse fixe le cercle Γ, ainsi que les centres de C et de C′, et l'on fait varier les rayons de ces deux derniers cercles de telle sorte que la somme de leurs carrés reste constante.

4° Démontrer que les cercles S orthogonaux au cercle Γ et coupés harmoniquement par deux cercles C et C′ sont aussi coupés harmoniquement par une infinité de couples de cercles que l'on cherchera à caractériser géométriquement.

Nota. — On dit qu'un cercle S est coupé harmoniquement par deux cercles C et C′, lorsque le rapport anharmonique des deux points de rencontre de S avec C et des deux points de rencontre de S avec C′ est, sur le cercle S, égal à — 1.

Mathématiques spéciales.

On considère un paraboloïde équilatère ayant pour équation, par rapport à des axes rectangulaires,

$$z = xy;$$

on prend sur l'axe Ox un segment

$$OM = \lambda$$

et sur l'axe Oy un segment

$$OM = \mu,$$

ces deux segments étant liés par une relation de la forme

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0,$$

où a, b, c, d désignent des constantes réelles.

1° Trouver la courbe Γ, lieu du point de rencontre de la génératrice rectiligne MG du paraboloïde passant par le point M de Ox avec le plan mené par Oz perpendiculairement à la droite MM′.

2° Combien existe-t-il de surfaces du deuxième ordre qui passent par cette courbe Γ; étudier le nombre des points d'intersection de Γ avec les génératrices rectilignes du paraboloïde donné; discuter la réalité de ces points.

3° Établir la relation nécessaire et suffisante qui doit lier les abscisses x_1, x_2, x_3, x_4 de quatre points de la courbe Γ, pour que ces quatre points soient dans un même plan. Former l'équation aux abscisses des points où le plan osculateur coupe la courbe en quatre points confondus; résoudre et discuter cette équation.

Indiquer le nombre de plans osculateurs qu'on peut mener d'un point de l'espace à la courbe Γ.

4° Comment faut-il déterminer les coefficients a, b, c, d pour que les tangentes à la courbe Γ fassent partie d'un complexe linéaire?

5° On désigne par Γ_1 la courbe du quatrième ordre qui correspond à cette détermination particulière des constantes a, b, c, d. Déterminer les points de contact des plans osculateurs menés d'un point donné P de l'espace à cette courbe Γ_1; démontrer que ces points sont dans un plan passant par P.

Nota. — On dit qu'une droite mobile

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

appartient à un complexe linéaire, quand les coefficients x_0, y_0, z_0, α, β, γ vérifient une équation de la forme

$$\begin{aligned} A\alpha + B\beta + C\gamma + L(\gamma y_0 - \beta z_0) \\ + M(\alpha z_0 - \gamma x_0) + N(\beta x_0 - \alpha y_0) = 0, \end{aligned}$$

A, B, C, L, M, N désignant des constantes.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On donne l'équation aux dérivées partielles

$$p^2 + q^2 + (px + qy - z)^2 = F\left(\frac{x^2 + y^2 + 1}{z^2}\right).$$

où p, q désignent les dérivées partielles du premier ordre de z considéré comme fonction de x, y.

1° Former les équations des caractéristiques et prouver que ces équations admettent deux intégrales qui ne dépendent pas de la forme de la fonction F.

2° Déduire du résultat obtenu que les courbes caractéristiques sont planes et que les développables caractéristiques sont des cônes. Dire quelle relation existe entre le plan d'une courbe caractéristique et le sommet du cône caractéristique circonscrit suivant cette courbe.

3° Indiquer comment l'on pourra utiliser ces résultats pour intégrer complètement l'équation proposée.

4° On mènera l'intégration jusqu'au bout dans le cas particulier où la fonction F a la forme

$$A\frac{x^2+y^2+1}{z^2}+B,$$

A, B désignant deux constantes.

Montrer que, dans ce cas, une intégrale complète est fournie par une surface du second degré dépendant de deux paramètres.

Mécanique rationnelle.

Un corps solide pesant, mobile autour d'un point fixe O, repose par deux de ses points R et R′ sur un plan horizontal fixe Π situé au-dessous de O. Soit OO_1 la perpendiculaire abaissée de O sur le plan Π : on suppose que l'angle ORR′ est droit et que l'on a, lorsque le corps repose sur le plan Π,

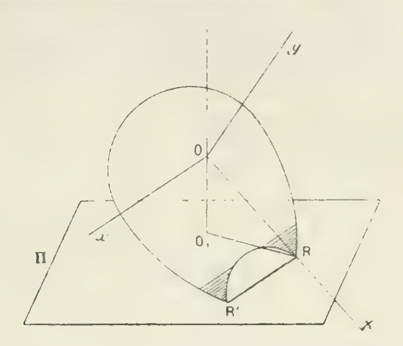
$$OO_1 = O_1R = RR' = a.$$

Le point R glisse *avec frottement* sur le plan Π, le point R′ glisse *sans frottement*.

Trouver le mouvement du corps en supposant qu'on lui imprime une vitesse initiale ω_0 (positive ou négative) de rotation autour de la verticale ascendante O_1O.

On prendra comme axes liés au corps la droite Oz dirigée suivant OR, la droite Ox parallèle à RR′ et dirigée dans le sens RR′, la droite Oy perpendiculaire au plan xOz et dirigée vers le haut. On supposera que les droites Ox, Oy, Oz sont les axes principaux d'inertie du corps relatifs au point O, et

l'on appellera A, B, C les moments d'inertie correspondants. On désignera par ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité G du corps par rapport aux axes Ox, Oy, Oz.



On se bornera à écrire les équations du mouvement dans le cas général où les coordonnées ξ, η, ζ sont quelconques.

On discutera le problème dans les deux cas particuliers suivants :

1° Le centre de gravité G est sur la partie positive de l'axe Oz;

2° Le centre de gravité G est sur la partie positive de l'axe Ox.

S'il arrive que l'un des points R et R' quitte le plan Π, ou que ces deux points le quittent à la fois, on se bornera à signaler ce fait sans étudier le mouvement ultérieur.

BOURSES DE LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES. CONCOURS DE 1897.

Mathématiques.

1° Dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy, on donne une droite (D) dont l'équation est

$$y = ax + b;$$

déterminer la parabole qui a son sommet en O, son axe dirigé suivant Ox et qui est normale à la droite (D); calculer en fonction de a et b les coordonnées du point P où cette parabole est normale à la droite D et du second point Q où elle rencontre cette même droite.

2° Trouver les lieux décrits par les points P et Q en supposant que la droite (D) tourne autour d'un point fixe de coordonnées x_0, y_0.

On figurera les diverses formes que peut affecter ce dernier lieu.

QUESTIONS.

1782. Étant donnée l'équation

$$ax^5 - 5bx^4 + 10cx^3 - 10dx^2 + 5ex - f = 0,$$

si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} 3\lambda &= 3c^2 - 4bd + ae,\\ 6\mu &= 2cd - 3be + af,\\ 3\nu &= 3d^2 - 4ce + bf,\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \omega &= a\nu - 2b\mu + c\lambda,\\ \omega_1 &= b\nu - 2c\mu + d\lambda,\\ \omega_2 &= c\nu - 2d\mu + e\lambda,\\ \omega_3 &= d\nu - 2e\mu + f\lambda,\end{aligned}\right.$$

la condition

$$3\begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}^2 - 16\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega & \omega_1 & \omega_2 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0,$$

exprime que l'équation a une racine double.

(P. Sondat.)

ERRATA.

La question 1781, août 1897, a été insérée par erreur. En faisant $x = y = z = \frac{1}{3}$, on voit qu'aucune des inégalités indiquées dans cette question n'est satisfaite.

[M2e]

SUR LA CORRESPONDANCE BIFORME; EXTENSION DES POLYGONES DE PONCELET;

Par M. G. FONTENÉ,
Professeur au Collège Rollin.

§ I.

1. *Résultante de deux correspondances biformes; cas de décomposition.* — Soient deux variables x et y liées par une relation doublement quadratique

$$F(x, y) = 0:$$

elles ont une correspondance biforme. Il existe quatre valeurs critiques de x, c'est-à-dire quatre valeurs de x donnant pour y deux valeurs égales; il existe de même quatre valeurs critiques de y. *Les valeurs critiques de x et celles de y ne sont pas indépendantes;* car, si on les représente par des points-racines a, b, c, d et α, β, γ, δ, les rapports anharmoniques (a, b, c, d) et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sont égaux. En effet, si l'on prend des coordonnées cartésiennes, l'équation $F(x, y) = 0$ représente une quartique binodale, et le fait en question résulte alors d'un calcul connu (Salmon, *Courbes planes*, n° 270; on peut encore consulter : Halphen, *Fonctions elliptiques*, IIe Partie, p. 338); *les deux systèmes de valeurs critiques sont équi-anharmoniques.* La relation $F = 0$, qui dépend de huit paramètres, est déterminée par ses éléments critiques et par une dernière donnée.

2. Cela posé, nous démontrerons ce théorème :

Deux correspondances biformes $F(x, y) = 0$,

$F'(y, z) = 0$ *donnent entre* x *et* z *une correspondance qui se décompose en deux correspondances biformes* $F''(x, z) = 0$, $F'''(x, z) = 0$, *lorsque les quatre valeurs critiques de* y *sont les mêmes dans les deux correspondances données. Les valeurs de* x *qui sont critiques pour* y *dans* $F = 0$ *sont aussi les valeurs de* x *critiques pour* z *dans* $F'' = 0$ *et dans* $F''' = 0$; *les valeurs de* z *qui sont critiques pour* y *dans* $F' = 0$ *sont aussi les valeurs de* z *critiques pour* x *dans* $F'' = 0$ *et dans* $F''' = 0$.

Soient les deux correspondances biformes

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0, \qquad A'z^2 + 2B'z + C' = 0,$$

A, B, C, A', B', C' étant des polynomes du second degré en y; d'après l'hypothèse on peut supposer

$$B^2 - AC = B'^2 - A'C' = \Delta.$$

et l'on a

$$(Ax + B)^2 - \Delta = 0, \qquad (A'z + B')^2 - \Delta = 0;$$

on en déduit, pour une même valeur de y,

$$Ax + B \pm (A'z + B') = 0,$$

et l'on achève facilement. On remarquera que, si l'on prend, par exemple, le système $F = 0$, $F' = 0$, $F'' = 0$, à des valeurs de x et de y qui vérifient $F = 0$ correspond une seule valeur de z. (En coordonnées cartésiennes dans l'espace, $F = 0$ et $F' = 0$ représentent les projections d'une courbe gauche qui a quatre points doubles à distance finie et qui se décompose en deux courbes gauches.)

3. On a ce corollaire :

Trois quantités x, y, z *étant liées par les relations doublement quadratiques* $F(x, y) = 0$, $f(y, z) = 0$,

$\varphi(z, x) = 0$, *pour que ces trois relations admettent une infinité de solutions, il faut d'abord que les valeurs de chaque variable qui sont critiques pour l'une des deux autres variables le soient pour la troisième, ce qui fait* 11 *conditions et non* 12; *il faut de plus une autre condition. Si l'on se donne* x, *on a à choisir entre deux valeurs pour* y, *et ce choix détermine* z *avec une valeur unique.*

La démonstration est facile : la réduction de 12 conditions apparentes à 11 conditions effectives tient à l'égalité de rapports anharmoniques dont il a été parlé; quand on a pris $F = 0$, $f = 0$, avec mêmes y critiques, la relation $\varphi = 0$ est déterminée : c'est l'une des deux relations résultantes des deux premières.

4. Nous ajouterons ceci :

Les N *quantités* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$ *étant liées par les* N *relations doublement quadratiques*

$$\varphi_{1,2}(\rho_1, \rho_2) = 0, \quad \varphi_{2,3}(\rho_2, \rho_3) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{N,1}(\rho_N, \rho_1) = 0,$$

si les valeurs de ρ_i *qui sont critiques pour* ρ_{i-1} *le sont aussi pour* ρ_{i+1}, *l'indice* i *prenant les valeurs* 2, 3, ..., N, 1 (*avec les conventions* $\rho_{N+1} = \rho_1$, $\rho_0 = \rho_N$), *il faut encore une condition pour que ces relations admettent une infinité de solutions; le nombre total des conditions supposées est* 4N. *Deux quelconques des* N *quantités* ρ_i *et* ρ_j, *sont liées par une relation doublement quadratique; la quantité* ρ_i *a quatre valeurs critiques pour* ρ_j, *les mêmes quel que soit* j. *Si l'on se donne* ρ_1, *on a à choisir entre deux valeurs pour* ρ_2, *et ce choix détermine complètement les autres* ρ. *Quand on a pris les* N − 1 *premières relations* $\varphi = 0$, *sous les conditions indiquées, la dernière rela-*

tion $\rho = 0$ est déterminée : c'est l'une des relations résultantes des $n-1$ premières. Pour $N > 3$ les conditions ne sont pas données comme des conditions nécessaires pour qu'il y ait une infinité de solutions. On remarquera encore que, pour $N > 3$, trois quelconques des quantités ρ ont deux à deux une correspondance biforme.

5. Voici une interprétation géométrique de la correspondance biforme. Les points A d'une conique S, et ses tangentes a, sont données en fonction d'un paramètre ρ par les formules

$$\frac{x}{X(\rho)} = \frac{y}{Y(\rho)} = \frac{z}{Z(\rho)}, \qquad \frac{u}{U(\rho)} = \frac{v}{V(\rho)} = \frac{w}{W(\rho)},$$

les polynomes X, ... étant du second degré. Si l'on prend deux coniques S_1 et S_2, et si l'on assujettit un point de l'une et un point de l'autre à cette condition que le point A_2 de la seconde soit sur la droite transformée du point A_1 de la première dans une corrélation générale, auquel cas le point A_1 est sur la droite primitive du point A_2, on aura

$$\begin{gathered} x_2(Ax_1 + By_1 + Cz_1) \\ + y_2(A'x_1 + B'y_1 + C'z_1) + z_2(A''x_1 + B''y_1 + C''z_1) = 0, \\ x_1(Ax_2 + A'y_2 + A''z_2) \\ + y_1(Bx_2 + B'y_2 + B''z_2) + z_1(Cx_2 + C'y_2 + C''z_2) = 0; \end{gathered}$$

les paramètres ρ_1 et ρ_2 seront liés par une relation doublement quadratique, dépendant de 8 paramètres, et par suite générale. On pourrait considérer les tangentes a au lieu des points A.

6. *Cas particulier.* — Lorsque la relation doublement quadratique $F(x, y) = 0$ est symétrique par rapport à x et y (3 conditions), les valeurs critiques de x

et celles de y sont égales (3 conditions, et non 4); la réciproque est vraie, comme on peut le voir au moyen du théorème énoncé dans l'Ouvrage d'Halphen, p. 338. Le théorème du n° 2 s'énonce alors comme il suit :

Deux correspondances biformes symétriques

$$F(x, y) = 0, \qquad F'(y, z) = 0,$$

donnent entre x et z une correspondance qui se décompose en deux correspondances biformes

$$F''(x, z) = 0, \qquad F'''(x, z) = 0,$$

lorsqu'elles ont les mêmes valeurs critiques. Chacune des correspondances obtenues admet ces mêmes valeurs critiques, d'où il suit que ces nouvelles correspondances sont également symétriques.

§ II.

7. Nous considérerons un cas plus particulier, qui est l'objet principal de ce Mémoire. L'équation

$$A \cos x + B \sin x - C = 0$$

a deux solutions quand on cherche simplement les lignes trigonométriques de l'angle x : elles sont confondues si l'on a $A^2 + B^2 - C^2 = 0$; en posant $\tang \frac{x}{2} = \rho$, on aurait $(A + C)\rho^2 - 2B\rho + (A - C) = 0$. Cela posé, considérons la relation

$$A \cos\alpha \cos\alpha' + B \sin\alpha \sin\alpha' - C = 0 \qquad \text{ou} \qquad \psi(\alpha, \alpha') = 0,$$

A^2, B^2, C^2 *étant inégaux deux à deux*; nous dirons que les quatre solutions

$$(\alpha, \alpha'), \quad (-\alpha, -\alpha'), \quad (\pi - \alpha, \pi - \alpha'), \quad (\pi + \alpha, \pi + \alpha')$$

forment une solution composée. Avec

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2} = \varphi, \qquad \operatorname{tang}\frac{a'}{2} = \varphi',$$

on aurait entre φ et φ' une correspondance biforme symétrique et l'on verrait que, dans l'hypothèse

$$(A^2 - B^2)(A^2 - C^2)(B^2 - C^2) = 0,$$

elle se décompose en deux correspondances uniformes, ce que nous voulons éviter.

Les *angles critiques* sont les valeurs de a (ou a') qui donnent pour a' (ou a) deux valeurs égales : ils sont donnés par la relation

$$A^2\cos^2\varphi + B^2\sin^2\varphi - C^2 = 0, \qquad \frac{\cos^2\varphi}{B^2 - C^2} = \frac{\sin^2\varphi}{C^2 - A^2} = \frac{1}{B^2 - A^2},$$

de sorte que les quatre angles critiques sont φ, $-\varphi$, $\pi - \varphi$, $\pi + \varphi$, donnant lieu à quatre angles associés θ, $-\theta$, $\pi - \theta$, $\pi - \theta$; la relation entre a et a' peut s'écrire

$$\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}\cos a\cos a' + \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}\sin a\sin a' - 1 = 0.$$

8. On a ce théorème :

Trois angles a, a', a'' étant liés par les deux relations $\psi''(a, a') = 0$, $\psi(a', a'') = 0$, pour que la relation entre a et a'' se décompose en deux relations de la forme $\psi'(a, a'') = 0$, il faut et il suffit que les deux premières relations aient les mêmes angles critiques; chacune des deux relations obtenues a aussi ces angles critiques.

Voici une démonstration directe qui fait connaître les deux relations nouvelles. D'abord l'élimination de a' donne

$$(A^2\cos^2 a'' + B^2\sin^2 a'' - C^2)(A''^2\cos^2 a + B''^2\sin^2 a - C''^2)$$
$$-(AA''\cos a\cos a'' + \ldots)^2 = 0;$$

cette relation devant être symétrique en a et a'', les deux premiers facteurs doivent s'annuler ensemble et la condition est nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, on écrit les relations $\psi'' = 0$, $\psi = 0$, avec φ et θ'', φ et θ, et l'une des relations cherchées $\psi' = 0$, avec φ et θ'. Pour déterminer θ', on fait $\alpha' = \varphi$, d'où $\alpha'' = \theta$, $\alpha = \theta''$, et la relation $\psi' = 0$ donne

$$\frac{\cos\theta\cos\theta'\cos\theta''}{\cos\varphi} + \frac{\sin\theta\sin\theta'\sin\theta''}{\sin\varphi} - 1 = 0.$$

avec deux valeurs pour θ'; on constate alors que l'élimination de a' entre les deux relations données, et l'élimination de θ' entre la relation $\psi' = 0$ et la relation ci-dessus, donnent le même résultat. On se rend bien compte de la démonstration en considérant les relations des six angles a, a', a'', θ, θ', θ''.

9. On a ce corollaire :

Trois angles a, a', a'' étant liés par les relations

$$\psi''(a, a') = 0, \qquad \psi(a', a'') = 0, \qquad \psi'(a'', a) = 0,$$

pour que ces trois relations admettent une infinité de solutions, il faut d'abord qu'elles aient les mêmes angles critiques; cette condition remplie, il faut encore une condition. Si les trois relations sont prises sous la forme

$$A'' \cos a \cos a' + B'' \sin a \sin a' - C'' = 0,$$

on a les trois conditions obtenues en égalant à zéro les déterminants du troisième ordre formés en prenant trois lignes du Tableau rectangulaire

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \\ A'^2 & B'^2 & C'^2 \\ A''^2 & B''^2 & C''^2 \\ AA'A'' & BB'B'' & CC'C'' \end{matrix} \right\|.$$

10. Nous ajouterons ceci :

Lorsque N angles a_1, a_2, ..., a_N sont liés par les N relations

$$\psi_{1,2}(a_1, a_2) = 0, \quad \psi_{2,3}(a_2, a_3) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_{N,1}(a_N, a_1) = 0,$$

qui ont les mêmes angles critiques, il faut une condition pour que ces relations admettent une infinité de solutions. Deux quelconques des N angles sont liés par une relation analogue, avec les mêmes angles critiques.

11. Soient deux coniques S_1, S_2 que nous rapporterons au triangle conjugué commun, et S_{12} une conique conjuguée au même triangle; si l'on a sur S_1 et S_2 les points A_1 et A_2 conjugués par rapport à S_{12}, les tangentes a_1 et a_2 sont conjuguées par rapport à une conique Σ_{12}, et les deux coniques de conjugaison sont polaires réciproques par rapport aux mêmes coniques que les deux coniques données; les points critiques A_1 sont ceux dont la polaire par rapport à S_{12} touche S_2, les tangentes critiques a_1 sont celles dont le pôle par rapport à Σ_{12} est sur S_2. Les points des coniques S_1, S_2 étant donnés par les formules

$$x_1 = a_1 \cos \alpha_1, \quad y_1 = b_1 \sin \alpha_1, \quad z_1 = c_1,$$
$$x_2 = a_2 \cos \alpha_2, \quad y_2 = b_2 \sin \alpha_2, \quad z_2 = c_2,$$

et la conique S_{12} ayant pour équation

$$A x^2 + B y^2 - C z^2 = 0,$$

la relation de conjugaison entre A_1 et A_2 est

$$A a_1 a_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + B b_1 b_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - C c_1 c_2 = 0.$$

12. On a ce théorème :

Étant données trois coniques S_1, S_2, S_3 conjuguées

à un même triangle $OO'O''$, *et deux coniques de conjugaison* S_{12}, S_{23} *également conjuguées à ce triangle, la correspondance entre* A_1 *et* A_3 *se décompose en deux correspondances biformes si les éléments* A_2 *critiques pour* A_1 *le sont aussi pour* A_3, *et chacune des correspondances entre* A_1 *et* A_3 *est donnée par une conique de conjugaison* S_{13} *conjuguée au même triangle* $OO'O''$.

13. On a ce corollaire :

Étant données trois coniques S_1, S_2, S_3 *conjuguées à un même triangle* $OO'O''$, *et trois coniques de conjugaison* S_{12}, S_{23}, S_{31}, *conjuguées à ce même triangle, pour qu'un triangle mobile* $A_1A_2A_3$ *puisse avoir ses sommets situés respectivement sur les trois premières coniques, deux sommets quelconques étant conjugués par rapport à la conique intermédiaire, il est nécessaire qu'un point de* S_2, *critique pour* S_1, *le soit aussi pour* S_3, *et qu'un point de* S_3, *critique pour* S_2, *le soit aussi pour* S_1, *auquel cas un point de* S_1 *critique pour* S_3 *l'est pour* S_2 ; *ces conditions remplies, il faut encore une condition. Les tangentes* a_1, a_2, *par exemple, sont conjuguées par rapport à une conique fixe* Σ_{12} *conjuguée au triangle* $OO'O''$. *Si l'on se donne l'élément* (A_1, a_1), *on a à choisir entre deux positions possibles pour* (A_2, a_2), *et ce choix détermine complètement* (A_3, a_3). *Les deux coniques* S_{12}, S_{23} *étant choisies de façon que* A_2 *critique pour* A_1 *le soit pour* A_3, *la conique* S_{31} *est déterminée avec deux solutions.*

14. Nous ajouterons ceci :

Étant donnée une chaîne de N *coniques* S_1, S_2, ..., S_N *conjuguées à un même triangle* $OO'O''$, *et* N *coniques*

de conjugaison $S_{12}, S_{23}, \ldots, S_N$, *conjuguées à ce même triangle, si les points de la conique* S_i *qui sont critiques pour* S_{i-1} *le sont aussi pour* S_{i+1}, *l'indice i prenant les* N — 1 *valeurs* 2, 3, ..., N (*auquel cas un point de* S_1 *critique pour* S_N *l'est aussi pour* S_2), *il faut une condition pour qu'il existe un contour polygonal mobile* $A_1 A_2 \ldots A_N$, *dont les sommets soient situés respectivement sur les coniques* S_2, *et dont les sommets consécutifs* A_i, A_{i+1} *soient conjugués par rapport à la conique intermédiaire* $S_{i,i+1}$. *Le nombre total des conditions est* N. *Deux sommets quelconques* A_i, A_j *sont conjugués par rapport à une conique fixe* S_{ij} *conjuguée par rapport au triangle* OO′O″; *en même temps, les tangentes* a_i, a_j *sont conjuguées par rapport à une conique fixe* $\Sigma_{i,j}$. *Si l'on se donne l'élément* (A_1, a_1), *on a à choisir entre deux positions possibles pour* (A_2, a_2), *et ce choix détermine complètement le contour. Les* N — 1 *premières coniques de conjugaison déterminent la dernière.*

§ III.

15. *Correspondance unie sur deux coniques.* — Plus particulièrement, la conique de conjugaison ponctuelle S_{12} peut passer par les quatre points communs aux deux coniques, S_1, S_2, auquel cas la conique de conjugaison tangentielle Σ_{12} touche les quatre tangentes communes à ces deux coniques; alors les quatre points communs sont des points unis de la correspondance, c'est-à-dire qu'un point commun se correspond à lui-même, et de même les quatre tangentes communes sont des tangentes unies. Réciproquement, si la correspondance entre les éléments $(A_1, a_1)(A_2, a_2)$ admet comme points unis les quatre points communs aux deux coniques S_1, S_2, et comme tangentes unies les tangentes communes à

ces deux coniques (sept conditions, et non huit), cette correspondance consiste en ce que les points A_1 et A_2 sont conjugués par rapport à une conique S_{12} passant par les quatre points communs à S_1 et S_2, ou en ce que les tangentes a_1 et a_2, ... Nous donnerons à cette correspondance le nom de *correspondance unie*.

16. Nous dirons qu'il y a correspondance tangentielle entre un point A_1 d'une conique S_1 et une tangente a_2 à la conique S_2 lorsque le point A_1 doit se trouver sur la tangente a_2, ou encore lorsque la tangente a_2 doit passer au point A_1 : cette correspondance tangentielle est une correspondance biforme; les éléments critiques de S_2 sont donnés par les tangentes communes aux deux coniques, ceux de S_1 sont donnés par les points communs. La correspondance tangentielle est une correspondance unie. La conique de conjugaison S_{12} est la conique S_2, la conique Σ_{12} est S_1.

La correspondance unie se ramène à la correspondance tangentielle :

1° Considérons trois coniques S'_1, S_2, S'_3 *inscrites à un même quadrilatère;* une tangente b à la conique intermédiaire rencontre S'_1 en deux points $\pm A'$ et S'_3 en $\pm C'$: il y a correspondance biforme entre b et A', entre b et C', et la correspondance entre A' et C' se décompose en deux correspondances biformes dont l'une associe les points de même signe, l'autre associant les points de signes contraires. Nous supposerons qu'on a choisi l'une des deux correspondances, de sorte que A' et b déterminent complètement C'; le passage du couple $+A'$, $+C'$ au couple $-A'$, $-C'$ se fait par une tangente commune, d'où la nécessité de ces tangentes communes pour la décomposition de la correspondance (A', C') en deux correspondances biformes.

Cette correspondance entre les éléments (A', a') et (C', c') est une correspondance unie.

2° Pour trois coniques S'_1, S''_2, S'_3 *circonscrites à un même quadrangle* (système de quatre points), on a des faits corrélatifs en partant d'un point B'' de la conique intermédiaire.

3° Réciproquement, *si les éléments* (A', a') *et* (C', c') *de deux coniques* S'_1, S'_3 *ont une correspondance unie, c'est-à-dire une correspondance biforme dans laquelle les points communs sont unis, et les tangentes communes sont unies (sept conditions), l'enveloppe de la droite* $A'C'$ *ou* b *est une conique* S_2 *touchant les quatre tangentes communes aux deux premières, et le lieu du point* (a', c') *ou* B'' *est une conique* S''_2 *passant par les quatre points communs aux deux premières;* les deux coniques S_2 et S''_2 sont polaires réciproques par rapport aux mêmes coniques que les deux coniques données. Nous rappellerons que les points A' et C' sont conjugués par rapport à une conique S'_{13} passant aux points communs à S'_1 et S'_3, et que l'on a un fait corrélatif, les deux coniques de conjugaison S'_{13} et Σ'_{13} étant polaires réciproques par rapport aux mêmes coniques que S'_1 et S'_3 ; la conique enveloppe S_2 touche les tangentes à S'_{13} aux points communs à S'_1 et S'_3, la conique lieu S''_2 passe aux points de contact avec Σ'_{13} des tangentes communes à S'_1 et S'_3.

17. Voici une démonstration directe des faits 1° et 2°. Nous indiquerons d'abord une identité : étant données la forme quadratique $f(x, y, z)$ et la forme adjointe $F(u, v, w)$, on a

$$F[(yz' - zy'), (zx' - xz'), (xy' - yx')] = \begin{vmatrix} f(x, x) & f(x, x') \\ f(x', x) & f(x', x') \end{vmatrix},$$

$f(x, x')$ étant $a_{11}xx' + \ldots + a_{12}(xy' + yx') + \ldots$; si le point M est sur la conique $f = 0$, on a pour F un carré parfait

$$F[(yz' - zy'), \ldots] = -f^2(x, x').$$

Considérons alors les trois coniques S'_1, S_2, S'_3 inscrites à un même quadrilatère; leurs équations tangentielles sont

$$F_1(u, v, w) = 0, \qquad F_1 - k^2 F_3 = 0, \qquad F_3(u, v, w) = 0;$$

en écrivant qu'un point A' de S'_1, et un point C' de S'_3 sont sur une tangente b à S_2, on a

$$F_1[(y_1 z_3 - z_1 y_3), \ldots] - k^2 F_3[(y_1 z_3 - z_1 y_3), \ldots] = 0,$$

ou

$$f_1^2(x_1, x_3) - k^2 f_3^2(x_1, x_3) = 0,$$

ou

$$f_1(x_1, x_3) \pm k f_3(x_1, x_3) = 0.$$

18. *Contours mobiles.* — Reprenons le théorème du n° 14, avec une chaîne de $2n$ coniques $S'_1, S_2, S'_3, S_4, \ldots, S_{2n}$, conjuguées à un même triangle $OO'O''$, et supposons que chaque conique d'indice pair est conique de conjugaison ponctuelle entre elle-même et chacune des deux coniques voisines, auquel cas chaque conique d'indice impair est conique de conjugaison tangentielle entre elle-même et chacune des deux coniques voisines. On a ce théorème.

Soit une chaîne de $2n$ coniques $S'_1, S_2, S'_3, S_4, \ldots, S_{2n}$, conjuguées à un même triangle $OO'O''$, chaque conique d'indice pair S touche les quatre tangentes communes aux deux coniques voisines S', chaque conique d'indice impair S' passant aux quatre points communs aux deux coniques voisines S (ce qui fait seulement $2n - 1$ conditions) : il faut une condition pour qu'il

existe un contour polygonal mobile de n côtés dont les sommets $A'_1, A'_3, A'_5, \ldots$ *soient sur la conique* S', *et dont les côtés* a_2, a_4, a_6, ... *soient tangents aux coniques* S. *Si l'on se donne* A'_1, *on a deux positions possibles pour* a_2, *et le choix de* a_2 *détermine entièrement le contour.*

Le triangle conjugué étant donné, le système de coniques dépend de $2n$ paramètres. En considérant la conique S_{2n} comme une enveloppe, on reconnaît que la dernière condition du théorème lie *généralement* $2n - 1$ quelconques des coniques données.

La chaîne de $2n$ coniques du théorème précédent est la plus générale pour laquelle il existe un contour polygonal mobile..., si l'on exige que, un sommet étant choisi, avec l'un des côtés qui partent de ce sommet, le contour soit déterminé complètement.

19. Les points A'_1 et A'_3 ayant une correspondance unie, le lieu du point (a'_1, a'_3) ou A''_2 est une conique S''_2 passant par les quatre points communs à S'_1 et S'_3; il suit de là que le contour variable $A'_1 a_2 A'_3 a_4 \ldots$ donne un contour variable analogue $a'_1 A''_2 a'_3 A''_4 \ldots$ dont les côtés roulent sur la conique S', dont les sommets décrivent des coniques S''; et ainsi de suite indéfiniment. En considérant l'enveloppe de la droite $A_2 A_4$, on prolongerait cette suite de contours en sens inverse.

20. Un certain nombre des coniques précédentes peuvent être confondues. On doit remarquer d'abord que toute correspondance biforme entre deux éléments d'une même conique a quatre éléments unis. Si cette correspondance est symétrique, les points A_1 et A_2 sont conjugués par rapport à une conique S_{12} qui passe aux points unis, les tangentes a_1 et a_2, ...; la correspon-

dance symétrique sur une conique est un cas limite de la correspondance unie sur deux coniques S_1 et S_2 ; les éléments unis donnent quatre points qui jouent le rôle des points communs aux deux coniques, et quatre tangentes....

Reprenons les faits du n° 16 :

1° Étant données deux coniques S' et S_2, une tangente b à S_2 rencontre S' en deux points A' et C' : il y a correspondance biforme entre A' et C'; cette correspondance est symétrique, et les points critiques sont les points communs aux deux coniques.

2° Avec deux coniques S' et S''_2, en partant d'un point B'' de cette dernière, on a des faits corrélatifs.

3° Réciproquement, si les éléments (A', a') et (C', c') d'une conique S' ont une correspondance biforme symétrique, l'enveloppe de la droite $A'C'$ est une conique S_2 passant par les points critiques, le lieu du point (a', c') est une conique S''_2 qui touche les tangentes critiques.

La conique S_2 touche d'ailleurs les tangentes unies, la conique S''_2 passe aux points unis. La conique S'_{13}, par rapport à laquelle A' et C' sont conjugués, passe par les points unis; la conique Σ'_{13} touche les tangentes unies.

Relativement au théorème du n° 18, on pourrait voir ici pourquoi on a introduit le mot *généralement* dans la remarque concernant la dernière condition.

On aurait en particulier le cas, considéré par Poncelet, où toutes les coniques S' sont confondues.

§ IV.

21. *Contours triangulaires mobiles; deux cas.* — Lorsqu'un triangle mobile a ses sommets sur trois coni-

ques S'_1, S'_2, S'_3, et ses côtés tangents à trois coniques S_1, S_2, S_3, d'une part, ce triangle peut devenir évanouissant, les côtés a, b, c étant trois droites concourantes, ou les sommets A′, B′, C′ étant trois points en ligne droite; d'autre part, il peut devenir bi-évanouissant, deux sommets étant confondus, ainsi que les côtés opposés. Les six premières conditions relatives aux coniques étant supposées remplies, et elles se réduisent à cinq, une tangente commune à S_1 et S_2 doit toucher S_3, ou passer par un point commun à S'_1 et S'_2; un point commun à S'_1 et S'_2 doit appartenir à S'_3, ou se trouver sur une tangente commune à S_1 et S_2. Il semble donc que l'indétermination du triangle ait lieu dans trois cas; mais nous allons montrer que ces trois cas se réduisent à deux, attendu que, si les coniques S ont quatre tangentes communes, les coniques S′ sont polaires réciproques des coniques S par rapport à un système de quatre coniques Σ, de sorte que les coniques S′ ont alors quatre points communs.

Les équations des six coniques étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=0, \qquad \frac{x^2}{a'^2}+\ldots=0, \qquad \frac{x^2}{a''^2}+\ldots=0,$$
$$\frac{u^2}{\alpha^2}+\frac{v^2}{\beta^2}-1=0, \qquad \ldots; \qquad \ldots,$$

si l'on écrit que le point $x=a\cos l$, $y=b\sin l$, $z=1$ est sur la tangente $u'=\alpha'\cos\lambda'$, $v'=\beta'\sin\lambda'$, $w'=-1$, on a

$$a\alpha'\cos l\cos\lambda'+b\beta'\sin l\sin\lambda'-1=0,$$

et l'on suppose

$$(a^2\alpha'^2-b^2\beta'^2)(a^2\alpha'^2-1)(b^2\beta'^2-1)\neq 0,$$

c'est-à-dire S'_1 et S_2 non bitangentes; les cinq conditions, pour que les six relations analogues aient les mêmes

angles critiques, sont [1]

$$\left\|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ a^2\alpha'^2 & b^2\beta'^2 & 1 \\ \alpha'^2 a''^2 & \dots\dots & . \\ a''^2\alpha^2 & \dots\dots & . \\ \alpha^2 a'^2 & \dots\dots & . \\ a'^2\alpha''^2 & \dots\dots & . \\ \alpha''^2 a^2 & \dots\dots & . \end{array}\right\| = 0,$$

et elles expriment que S'_1 passe par les points communs à S_2 et S_3, ... Si l'on écrit que les trois coniques S sont inscrites à un même quadrilatère, on a la sixième condition

$$\left|\begin{array}{ccc} \alpha^2\alpha'^2 & \dots & \dots \\ \alpha'^2\alpha''^2 & \dots & \dots \\ \alpha''^2\alpha^2 & \dots & \dots \end{array}\right| = 0.$$

Remarquons maintenant que, si l'on se donne α^2, β^2, α'^2, ... vérifiant cette condition, et a^2 à volonté, l'une des relations ci-dessus (rangées 1, 2, 7) détermine b^2, deux autres relations déterminent a''^2 et b''^2, deux autres déterminent a'^2 et b'^2, et l'on a une seule solution; or cette solution unique est facile à apercevoir : elle est formée par les relations

$$\frac{a^2}{\alpha^2} = \frac{a'^2}{\alpha'^2} = \frac{a''^2}{\alpha''^2} = \frac{1}{\mathrm{A}^2}, \qquad \frac{b^2}{\beta^2} = \dots = \frac{1}{\mathrm{B}^2}.$$

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{A}^2 & \mathrm{B}^2 & 1 \\ \alpha^2\alpha'^2 & \dots & . \\ \alpha'^2\alpha''^2 & \dots & . \\ \alpha''^2\alpha^2 & \dots & . \end{array}\right| = 0.$$

(1) Ce qui signifie qu'on les obtient en égalant à zéro les cinq déterminants formés au moyen de trois lignes du Tableau rectangulaire qui constitue le premier membre de l'égalité.

qui donnent successivement $\mathcal{A}^2$, $\mathcal{B}^2$, b^2, ... On peut donc remplacer les six relations entre les douze quantités a^2, b^2, ... par les huit relations précédentes entre les quatorze quantités a^2, b^2, ..., $\mathcal{A}^2$, $\mathcal{B}^2$: les six premières expriment que les coniques S' sont polaires réciproques des coniques S par rapport aux coniques

$$(\Sigma) \qquad \pm \mathcal{A}x^2 \pm \mathcal{B}y^2 - z^2 = 0;$$

la dernière exprime que les coniques S sont inscrites à un même quadrilatère, et celle qui reste est une relation entre $\mathcal{A}^2$ et $\mathcal{B}^2$, les coniques S étant supposées connues (cette dernière relation peut aussi bien être rattachée aux coniques S').

On peut donc prévoir ce théorème, qui sera démontré rigoureusement :

Étant donnés deux systèmes de trois coniques $S_1 S_2 S_3$, $S'_1 S'_2 S'_3$, *tels que dans la chaîne fermée*

$$\begin{array}{ccc} & S'_1 & \\ S_3 & & S_2 \\ S'_2 & & S'_3 \\ & S_1 & \end{array}$$

chaque conique S touche les tangentes communes aux deux coniques voisines, et chaque conique S' passe par les points communs aux deux coniques voisines (5 *conditions*), *un triangle qui doit avoir ses côtés a, b, c tangents aux coniques S, et ses sommets A', B', C' sur les coniques S', est indéterminé dans deux cas :*

1° *Lorsque les coniques S sont inscrites à un même quadrilatère, auquel cas les coniques S' sont circonscrites à un même quadrangle, les coniques S' étant polaires réciproques des coniques S par rapport à un système de quatre coniques* Σ;

2° *Lorsque les quatre tangentes communes à* S_1 *et*

S_2 *passent respectivement aux quatre points d'intersection de* S'_1 *et* S'_2, *auquel cas les quatre tangentes communes à* S_2 *et* S_3, ...

Chacun des deux systèmes de coniques dépend de 12 paramètres; pour le premier système, on peut se donner les coniques S inscrites à un même quadrilatère, et la conique Σ avec un paramètre; pour le second système, on peut se donner les coniques S conjuguées à un même triangle, et les coniques S′ sont alors déterminées, avec quatre solutions. Dans chacun des deux systèmes, la première condition lie cinq quelconques des six coniques.

22. Dans le premier système les tangentes a', b', c' en A′, B′, C′ sont concourantes, les points de contact A, B, C des tangentes a, b, c sont en ligne droite : le lieu des points de concours des tangentes a', b', c' est une conique S″ passant par les points communs aux coniques S′ et dont l'équation est

$$\frac{x^2}{4k^2 a^2 a'^2 a''^2} + \ldots - z^2 = 0,$$

l'enveloppe de la droite qui passe par les points de contact A, B, C est une conique polaire réciproque de la précédente par rapport aux coniques Σ. *A priori*, si l'on se donne les coniques S'_1, S'_2, S'_3 et S″, avec quatre points communs, et si d'un point de S″ on mène aux coniques S′ les tangentes $\pm a'$, $\pm b'$, $\pm c'$, dont les points de contact sont $\pm$ A′, $\pm$ B′, $\pm$ C′, l'enveloppe des droites B′C′ est une conique S_1, ...

23. Voici la démonstration rigoureuse du théorème énoncé plus haut. Les coniques S'_1, S'_2, S'_3 ont pour

équations

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0, \qquad a'^2x^2 + \ldots = 0, \qquad a''^2x^2 + \ldots = 0,$$

les coniques S_1, S_2, S_3 ont pour équations

$$\begin{aligned}
&(S_1)\ (b'^2c'^2u^2 + c'^2a'^2v^2 - a'^2b'^2w^2) - k^2\ (b''^2c''^2u^2 + \ldots) = 0,\\
&(S_2)\ (b''^2c''^2u^2 + \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad) - k'^2\ (b^2\ c^2\ u^2 + \ldots) = 0,\\
&(S_3)\ (b^2\ c^2\ u^2 + \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad) - k''^2\ (b'^2c'^2u^2 + \ldots) = 0.
\end{aligned}$$

avec deux conditions que nous retrouverons plus loin, et qui expriment que S'_1 passe par les points communs à S_2 et S_3, ...

Si l'on écrit que la droite joignant les deux points B' et C' donnés par les relations $a'x' = \cos l'$, $b'y' = \sin l'$, $c'z' = 1$ et $a''x'' = \cos l''$, ..., est tangente à la conique S_1, on a (n° 17) la relation

$$\left(A + \frac{\varepsilon k}{A}\right)\cos l' \cos l'' + \left(B + \frac{\varepsilon k}{B}\right)\sin l' \sin l'' - \left(C + \frac{\varepsilon k}{C}\right) = 0,$$

avec $A = \dfrac{a'}{a''}$, ..., $\varepsilon = \pm 1$; les angles critiques sont donnés par une équation qui se réduit à

$$\left(\frac{A^2}{k} + \frac{k}{A^2}\right)\cos^2\varphi + \left(\frac{B^2}{k} + \frac{k}{B^2}\right)\sin^2\varphi - \left(\frac{C^2}{k} + \frac{k}{C^2}\right) = 0,$$

sans ε. En faisant de même pour S_2 et pour S_3, on voit que les trois conditions d'indétermination du problème que l'on étudie sont

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1\\
\dfrac{A^2}{k} + \dfrac{k}{A^2} & \cdot & \cdot\\
\dfrac{A'^2}{k'} + \dfrac{k'}{A'^2} & \cdot & \cdot\\
\dfrac{A''^2}{k''} + \dfrac{k''}{A''^2} & \cdot & \cdot\\
\left(A + \dfrac{\varepsilon k}{A}\right)\left(A' + \dfrac{\varepsilon' k'}{A'}\right)\left(A'' + \dfrac{\varepsilon'' k''}{A''}\right) & \cdot & \cdot
\end{vmatrix} = 0:$$

les deux premières conditions expriment que les points de S'_1 qui sont critiques pour S'_2 le sont pour S'_3, ..., c'est-à-dire que la conique S'_1 passe par les points communs à S_2 et S_3, ...; reste la dernière condition. Or, en développant les éléments de la dernière rangée, avec les relations $AA'A'' = 1$, ..., et en les combinant avec ceux des rangées précédentes, on trouve que l'on peut remplacer cette rangée par une autre dont les éléments sont

$$(\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''kk'k'' - 1)\left(\frac{\varepsilon A^2}{k} + \frac{\varepsilon' A'^2}{k'} + \frac{\varepsilon'' A''^2}{k''}\right), \quad \ldots.$$

On a donc une première solution $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''kk'k'' = 1$; elle donne la condition nécessaire $k^2k'^2k''^2 = 1$, qui exprime que les trois coniques S sont inscrites à un même quadrilatère; d'ailleurs les quatre relations

$$\left(A^2 + \frac{k^2}{A^2}\right)\cos^2\varphi + \ldots = 0, \quad \ldots, \quad k^2k'^2k''^2 = 1,$$

au lieu de déterminer φ, donnent la condition

$$(a^2b'^2c''^2) = 0,$$

qui exprime que les coniques S' ont quatre points communs.

On a une seconde solution en remplaçant dans la matrice ci-dessus les éléments de la dernière rangée par les éléments $\frac{\varepsilon A^2}{k} + \frac{\varepsilon' A'^2}{k'} + \frac{\varepsilon'' A''^2}{k''}$, ...; je me suis assuré que cette seconde solution est bien celle du théorème énoncé.

Les points B' et C' sont conjugués par rapport à l'une des coniques $S'_2 + \varepsilon k S'_3 = 0$: avec la première solution, ces coniques passent par les points communs aux trois coniques S'. On a un fait corrélatif.

24. Avec la première solution, le système de coniques

étant indépendant des signes ε, on a pour les mêmes coniques quatre espèces de triangles mobiles. Avec la deuxième solution, les coniques sont liées aux ε, une tangente commune à S_1 et S_2 pouvant passer par l'un ou l'autre des quatre points communs aux deux coniques S'_1 et S'_2 ; pour des coniques données, on a deux espèces de triangles.

25. *Cas où le triangle est conjugué par rapport à une conique fixe.* — Le système de coniques peut satisfaire à la fois aux conditions 1° et aux conditions 2° du théorème ; il admet alors un système de triangles qui fait partie à la fois des deux solutions, trois autres systèmes de triangles qui font partie de la première solution, et un dernier système de triangles qui fait partie de la deuxième solution : ce sont ces derniers triangles que nous allons considérer, et ils sont conjugués par rapport à une conique fixe. Les six coniques étant dans le premier cas du théorème, supposons que l'une des quatre coniques Σ (par rapport auxquelles les coniques S' sont polaires réciproques des coniques S) touche les quatre tangentes communes aux coniques S, auquel cas les points de contact de ces tangentes avec Σ sont les points communs aux coniques S' : on est en même temps dans le second cas du théorème, et la figure dépend de 11 paramètres ; la conique Σ ayant pour équation $\mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}y^2 - 1 = 0$, en disposant des signes de a, a', a'', b, b', b'', on peut avoir $\frac{a}{\alpha} = \ldots = \frac{1}{\mathcal{A}}$, $\frac{b}{\beta} = \ldots = \frac{1}{\mathcal{B}}$, et alors, au n° 21, on peut prendre $l = \lambda$, $l' = \lambda'$, $l'' = \lambda''$: en effet, les six relations entre les angles se réduiront à trois relations, telles que

$$\frac{\alpha\alpha'}{\mathcal{A}} \cos\lambda \cos\lambda' + \ldots - 1 = 0,$$

et si l'on écrit que ces trois relations admettent une infinité de solutions, la première condition exprime que la conique Σ touche les tangentes communes aux coniques S; or les hypothèses $l=\lambda$, $l'=\lambda'$, $l''=\lambda''$ montrent que le triangle mobile est conjugué par rapport à la conique Σ, qui est à la fois S'_{23}, ..., Σ_{23}, ...

26. Les équations des coniques S'_{23}, ... étant $S'_2 = -\varepsilon k S'_3$, $S'_3 = -\varepsilon' k' S'_1$, $S'_1 = -\varepsilon'' k'' S'_2$, l'équation de la conique Σ peut prendre ces trois formes : on a donc en multipliant $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' k k' k'' = -1$, ce qui est d'accord avec ce fait qu'on est dans le premier cas du théorème ; on voit en même temps que le système de triangles ne fait pas partie de la première solution : c'est l'un des deux systèmes de la seconde solution. Soit A′B′C′ un triangle de l'espèce de ceux que l'on considère ici, avec $\varepsilon=+$, $\varepsilon'=+$, $\varepsilon''=+$, par exemple; la polaire de A′ par rapport à Σ coupe S'_2 en deux points B′ et $\mathfrak{B}'$, S'_3 en deux points C′ et $\mathfrak{C}'$, le triangle A′$\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ est dans les mêmes conditions que le triangle A′B′C′, et les deux triangles A′B′$\mathfrak{C}'$ et A′$\mathfrak{B}'$C′ répondent aux hypothèses $\varepsilon=-$, $\varepsilon'=+$, $\varepsilon''=+$, et font partie des triangles de la première solution ; les trois sommets A′, B′, C′ donnent ainsi trois espèces de triangles. Une dernière série de triangles se rattache à la fois aux deux cas du théorème.

Les tangentes en A′, B′, C′ forment un triangle A″B″C″ inscrit à une conique fixe S″; les points de contact des côtés a, b, c avec les coniques S forment un triangle circonscrit à une conique fixe. Le triangle A″B″C″ est dans les conditions du théorème de Poncelet.

27. *Cas où des coniques sont confondues.* — Si les coniques S'_1 et S'_2 se confondent en une même conique S′, sans que S'_3 se confonde avec elles, les coniques S_1 et S_2 doivent se confondre en une même co-

nique S; considérons ce cas. Nous appellerons *tangentes remarquables* de la conique S les tangentes à cette conique aux points d'intersection avec S'_3, lesquels points seront des points C'; les points remarquables de la conique S' seront les points de contact avec S' des tangentes communes à cette conique et à S_3, lesquelles tangentes seront des droites *c*. On a deux coniques S et S'; les sommets A' et B' d'un triangle décrivent la conique S', les côtés *a* et *b* roulent sur la conique S : le côté *c* roulant sur une conique S_3 qui passe par les points communs à S et S', on cherche le lieu du sommet C'; ce point est l'intersection de deux tangentes *a* et *b* à la conique S, lesquelles ont une correspondance biforme symétrique. L'un des points C' décrit une conique qui est dans le second cas du théorème, un autre également, et ces deux coniques ont été données, je crois, par Salmon (*Sections coniques*, 2e édition française, p. 599); les tangentes communes à S et S_3 passent aux points communs à S' et S'_3, les tangentes remarquables de S passent aux points remarquables de S', et l'on a des triangles bi-évanouissants. Les deux autres points C' décrivent une même conique S'_3 qui est dans le premier cas du théorème; la conique S'_3 passe aux points remarquables de la conique S', la conique S_3 touche les tangentes remarquables de la conique S, et l'on a des triangles évanouissants, formés par trois droites concourantes ou par trois points en ligne droite.

28. Dans le système de Poncelet, les trois coniques S' sont confondues, les coniques S étant distinctes; on est dans le second cas du théorème : les tangentes communes à S_1 et S_2 passent aux points remarquables de la conique $S'_1 = S'_2$ en donnant des triangles bi-évanouissants. .... On a un système corrélatif.

29. Les trois coniques S' peuvent être confondues, les deux coniques S_1 et S_2 l'étant aussi : on cherche l'enveloppe du côté c. On peut rattacher ce cas à celui du n° 27, ou au système de Poncelet.

30. Les coniques S' peuvent être confondues, les coniques S l'étant également : les tangentes remarquables de S passent aux points remarquables de S'; l'exemple de deux cercles vérifiant la relation d'Euler

$$d^2 = R^2 - 2Rr'$$

montre nettement ce que doit être un triangle bi-évanouissant dans le cas de deux coniques confondues : le côté double $a = b$ touche $S_1 = S_2$ en un point C' situé sur S'_3, le sommet double $A' = B'$ est sur $S'_1 = S'_2$ en un point dont la tangente c touche S_3.

§ V.

31. *Cas où les coniques* S_p *sont confondues avec les coniques* S'_{p+1}. — Étant données n coniques $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n$, conjuguées à un même triangle OO'O'', si l'on cherche à quelles conditions un contour polygonal mobile peut avoir ses n sommets sur ces coniques, le côté A'B' étant tangent en A' à $S'_1, \ldots$, on trouve d'abord qu'une tangente commune à S'_2 et S'_3 doit avoir son point de contact avec S'_2 situé sur $S'_1, \ldots$, et il reste une condition. Dans le cas $n = 3$ la condition d'indétermination est vérifiée d'elle-même, dans le cas $n = 4$ l'indétermination ne peut pas se produire.

En effet, la conique $S_p = S'_{p+1}$ ayant pour équations

$$\frac{x^2}{a_p^2} + \ldots = 0, \qquad a_p^2 u^2 + \ldots = 0,$$

si l'on pose $\frac{a_{p+1}}{a_p} = A_p, \ldots$, on a les relations

$$A_1 \cos l_1 \cos l_2 + \ldots = 0,$$
$$A_2 \cos l_2 \cos l_3 + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

avec cette particularité : $A_1 A_2 \ldots = 1$, $B_1 B_2 \ldots = 1$, $C_1 C_2 \ldots = 1$.

Outre les conditions

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A_1^2 & B_1^2 & C_1^2 \\ A_2^2 & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = 0.$$

on a une dernière condition d'indétermination. Pour $n = 3$, on l'obtient en ajoutant à la matrice ci-dessus la rangée $A_1 A_2 A_3 \ldots$, ou $1, 1, 1$, identique à la première rangée. Pour $n = 4$, si l'on met les relations sous la forme

$$\frac{\cos\theta_1}{\cos\varphi} \cos l_1 \cos l_2 + \ldots - 1 = 0,$$

on trouve que la condition d'indétermination est

$$\frac{(\sin^2\varphi - \sin^2\theta_1)(\sin^2\varphi - \sin^2\theta_2)\ldots}{\sin^4\varphi\cos^4\varphi} - \left(\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4}{\cos^2\varphi} + \ldots - 1\right)^2 = 0;$$

or, à cause de $A_1 A_2 A_3 A_4 = 1, \ldots$, le dernier terme est nul, et la relation est impossible dans les conditions où l'on s'est placé au n° 6 : il faudrait accepter des correspondances tangentielles uniformes, et la question serait très différente de celle étudiée ici.

NOTE.

Mon ami R. Bricard, dans une étude sur l'octaèdre articulé qui paraîtra prochainement dans le *Journal de*

l'École Polytechnique, a rencontré de son côté le théorème du n° 2. Sa démonstration, qu'il m'a communiquée, montre que les conditions énoncées sont nécessaires, chacune des relations $F = 0$, $F' = 0$ étant supposée indécomposable.

[M²2f]

NOTE SUR LA SYMÉTRIE DANS LES SURFACES ALGÉBRIQUES;

Par M. DUMONT.

Indépendamment de la symétrie par rapport à un plan étudié précédemment ici (voir *Nouvelles Annales*, septembre 1896, p. 403) par M. Mangeot, et de la symétrie par rapport à un centre, on peut considérer la symétrie par rapport à un axe.

Nous donnerons ici au mot *axe de symétrie* un sens plus général que celui qu'on lui attribue ordinairement, savoir le sens adopté par Bravais et par la Cristallographie.

Une droite sera dite *axe de symétrie binaire, ternaire, quaternaire, quinaire, senaire* d'une surface, suivant que la surface pourra coïncider avec elle-même après une rotation de 180°, de 120°, de 90°, de 72°, de 60°. Un axe de symétrie quaternaire ou senaire est évidemment en même temps axe binaire.

I. — Surfaces du troisième ordre.

L'équation générale peut s'écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &(Az^3 + 3Bz^2 + 3Cz + D) \\ &\quad + (ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3) \\ &\quad + 3z(mx^2 + 2pxy + qy^2) \\ &\quad + 3z^2(hx + ky) \\ &\quad + 3(rx^2 + 2sxy + ty^2) \\ &\quad + 6z(ux + vy) + 3(fx + gy) = 0 \end{aligned}\right.$$

Supposons que la surface ait un axe de symétrie et qu'on ait pris cet axe pour Oz.

Nous remarquerons d'abord que, par une rotation autour de Oz correspondant à l'indice de symétrie de cet axe, il faut que chacun des sept groupes de termes mis en évidence dans l'équation (1) se reproduise lui-même, car il ne peut en reproduire aucun autre.

Il en résulte que la symétrie quinaire ne peut se présenter, car les groupes

$$ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3,\quad hx+ky,\quad ux+vy,\quad fx+gy,$$

égalés à zéro, représentant, le premier trois droites, les trois autres une droite, ne peuvent présenter cette symétrie. Ces groupes doivent donc disparaître. Quant aux troisième et cinquième groupes qui, égalés à des constantes, représentent des coniques, ils ne peuvent subsister que si les deux coniques sont des cercles. L'équation de la surface (coordonnées rectangulaires) se réduit alors à la forme

$$Az^3+3Bz^2+3Cz+D+3mz(x^2+y^2)+3r(x^2+y^2)=0.$$

La surface est de révolution et, pour une telle surface, on peut dire que l'indice de symétrie est indéterminé.

Considérons les autres symétries.

1° Oz *axe binaire*. — Une rotation de 180° laisse intacts les premier, troisième et cinquième groupes, tandis qu'elle change le signe des quatre autres; donc tous les groupes ne peuvent subsister et l'équation doit se réduire à l'une des deux formes

$$(3_1)\quad \left\{\begin{aligned}&Az^3+3Bz^2+3Cz+D\\&\quad+3z(mx^2+2pxy+qy^2)\\&\quad+3(rx^2+2sxy+ty^2)=0.\end{aligned}\right.$$

$$(3_2)\quad \left\{\begin{aligned}&ax^3+3bx^2y+3cxy^2\\&\quad+dy^3+3z^2(hx+ky)\\&\quad+6z(ux+vy)+3(fx+gy)=0.\end{aligned}\right.$$

La forme (β_1) peut, dans certains cas, représenter une surface à plan de symétrie passant par Oz, savoir lorsque par une rotation des axes autour de Oz, on peut faire disparaître à la fois les deux termes du premier degré en x ou y. Mais on voit qu'en même temps l'équation est privée des termes du premier degré en y ou x, de sorte qu'il ne peut y avoir un plan de symétrie sans qu'il y en ait un second passant aussi par Oz, ce que l'on prévoit aisément.

Les deux plans dont il s'agit sont des plans de symétrie proprement dite si les axes sont rectangulaires, des plans de symétrie oblique analogues aux plans diamétraux des quadriques si les axes sont obliques.

La forme (β_2) ne peut au contraire représenter une surface à plan de symétrie passant par Oz sans se décomposer.

Mais elle peut représenter des surfaces ayant $z=0$ pour plan de symétrie, tandis que de telles surfaces ne peuvent être représentées par (β_1), car si l'on avait à la fois $A=C=0$, $m=p=q=0$ la surface ne serait plus du troisième degré.

La forme (β_2) représente une surface à plan de symétrie $z=0$, si $u=v=0$, et l'on voit qu'alors la surface a l'origine pour centre de symétrie.

2° Oz *axe ternaire.* — Pour qu'une rotation de 120° reproduise l'équation (1), il faut que les quatrième, sixième et septième groupes de termes disparaissent; que, de plus, les groupes $mx^2+2pxy+qy^2$ et $px^2+2sxy+ty^2$, égalés à des constantes, représentent des cercles et enfin que le deuxième groupe égalé à zéro représente trois droites formant entre elles des angles de 60°. Comme on peut supposer les axes Ox et Oy orientés de manière que l'une de ces droites ait la direc-

tion de l'axe des x, l'équation se réduit à la forme

$$(t) \quad \left\{ \begin{aligned} & A z^3 + 3 B z^2 + 3 C z + D + d y (y^2 - 3 x^2) \\ & \qquad + 3 m z (x^2 + y^2) + 3 r (x^2 + y^2) = 0 \end{aligned} \right. \quad [1].$$

Ainsi, l'on voit que dans le cas de la symétrie ternaire on a nécessairement trois plans de symétrie passant par Oz (qui sont actuellement le plan zOy et deux autres inclinés de 60° ont zOy).

Si $A = C = m = 0$, on a en outre le plan de symétrie $z = 0$.

Si c'est le paramètre A qui est nul, on a les surfaces de révolution et il aisé de voir qu'on les a toutes.

Ainsi, il suffit d'ajouter *une seule* condition pour passer des surfaces à symétrie ternaire aux surfaces de révolution.

On peut remarquer immédiatement, ici, que le groupe $y(y^2 - 3x^2)$, égalé à une constante, représentant une cubique plane qui a la symétrie ternaire et non la symétrie senaire, les surfaces du troisième ordre n'ont jamais la symétrie senaire, à moins d'être de révolution.

Si l'axe de symétrie ternaire est la droite d'intersection des plans bissecteurs du trièdre Oxyz, l'équation de la surface a la forme [2]

$$\begin{aligned} & A(x^3 + y^3 + z^3) + 3 B (x^2 y + y^2 z + z^2 x) \\ & \quad + 3 C (x y^2 + y z^2 + z x^2) + 6 D x y z \\ & \quad + 3 E (x^2 + y^2 + z^2) + 6 F (x y + y z + z x) \\ & \qquad\qquad + 3 G (x + y + z) + H = 0. \end{aligned}$$

3° Oz *axe quaternaire*. — On trouve par des rema-

---

[1] Il est aisé de voir que cette équation est, au fond, la même que celle qui est donnée (*Nouvelles Annales*, 1896; p. 416) car on peut toujours de l'équation (t) faire disparaître le terme $3zB^2$.

[2] On vérifie aisément que les trois plans bissecteurs sont plans de symétrie.

niements analogues l'équation des surfaces de révolution. Ainsi, l'axe de symétrie ne peut être quaternaire sans être de révolution, c'est-à-dire d'indice indéterminé.

II. — Surfaces du quatrième ordre.

L'équation générale peut s'écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &(Az^4 + 4Bz^3 + 6Cz^2 + 4Dz + E)\\ &\quad + (ax^4 + 4bx^3y + 6Cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4)\\ &\quad + z(4fx^3 + 12gx^2y + 12hxy^2 + 4ky^3)\\ &\quad + z^2(6lx^2 + 12mxy + 6ny^2) + z^3(4px + 4qy)\\ &\quad + (4rx^3 + 12sx^2y + 12txy^2 + 4uy^3)\\ &\quad + z(12Fx^2 + 24Gxy + 12Hy^2)\\ &\quad + z^2(12Lx + 12My) + (12Nx^2 + 24Pxy + 12Qy^2)\\ &\qquad\qquad + 6z(Rx + Sy) + 4Tx + 4Vy = 0. \end{aligned}\right.$$

Chacun des onze groupes dont se compose le premier membre de cette équation doit se reproduire par une rotation autour de l'axe de symétrie, s'il y en a un, la rotation ayant la valeur indiquée par l'indice de l'axe.

Il en résulte, comme dans le cas précédent, que la symétrie quinaire ne peut se présenter ici, à moins que la surface ne soit de révolution.

Considérons donc les autres symétries, Oz étant encore l'axe.

1° *Symétrie binaire*. — Pour qu'une rotation de 180° fasse coïncider la surface avec elle-même, l'équation doit se réduire à

$$(\beta_1)\quad \left\{\begin{aligned} &Az^4 + 4Bz^3 + 6Cz^2 + 4Dz + E\\ &\quad + 6z^2(lx^2 + 2mxy + ny^2)\\ &\quad + (ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4)\\ &\quad + 12z(Fx^2 + 2Gxy + Hy^2)\\ &\qquad\qquad + 12(Nx^2 + 2Pxy + Qy^2 = 0 \end{aligned}\right.$$

ou à

$$(\beta_2)\quad \left\{\begin{aligned} &4z(fx^3 + 3gx^2y + 3hxy^2 + ky^3)\\ &\quad + 4(rx^3 + 3sx^2y + 3txy^2 + uy^3)\\ &\quad + 4z^3(px + qy) + 12z^2(Lx + My)\\ &\qquad + 6z(Rx + Sy) + 4(Tx + Vy) = 0 \end{aligned}\right.$$

Comme dans le cas des surfaces du troisième ordre, la forme (β_2) ne peut représenter des surfaces à plan de symétrie, passant par Oz, sans se décomposer. Mais elle peut en représenter qui aient $z = 0$ pour plan de symétrie, savoir si l'on a

$$f = g = h = k = p = q = R = S = 0.$$

L'origine est alors centre de symétrie.

Mais, contrairement à ce qui a lieu pour le troisième ordre, la forme (β_1) peut aussi représenter, sans qu'il y ait dégénérescence, des surfaces ayant $z = 0$ pour plan de symétrie. Il suffit que $B = D = F = G = A = 0$.

La surface (β_1) aura un plan de symétrie passant par Oz, si l'on a (ou si l'on peut avoir par une rotation convenable) $m = b = d = G = P = 0$.

On a encore un plan de symétrie perpendiculaire au premier (particularité indépendante du degré de la surface et qui se présente pour toute figure ayant un axe de symétrie binaire et un plan de symétrie passant par cet axe).

2° *Symétrie ternaire.* — On voit que les cinquième, huitième, dixième et onzième groupes de termes doivent disparaître, que de plus les quatrième, septième et neuvième groupes doivent représenter des cercles nuls ainsi que le second qui est alors de la forme $(x^2 + y^2)$. L'équation se réduit alors à

$$(\gamma) \quad \left\{ \begin{aligned} & A z^4 + 4 B z^3 + 6 C z^2 + 4 D z + E \\ & \quad + a(x^2 + y^2)^2 + 4 f X_1 X_2 X_3 z + 6 l z^2 (x^2 + y^2) \\ & \quad + 4 r Y_1 Y_2 Y_3 + 12 F (x^2 + y^2) z + 12 N (x^2 + y^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

où $X_1 X_2 X_3 = 0$ et $Y_1 Y_2 Y_3 = 0$ représentent deux groupes de trois droites passant par l'origine et faisant entre elles des angles de 60°, mais qui ne sont pas nécessairement orientés de la même manière, de sorte que l'on ne peut pas, en général, les ramener à la fois à la

forme $y(y^2 - 3x^2)$ par une rotation autour de Oz des axes de coordonnées.

Il en résulte, les droites de l'un de ces groupes pouvant former un angle quelconque α avec les droites de l'autre, que contrairement à ce qui a lieu pour le troisième ordre, l'existence d'un axe de symétrie ternaire n'entraîne ici celle d'aucun plan de symétrie passant par cet axe.

Toute section de la surface par un plan perpendiculaire à Oz est une quartique plane ayant O pour centre de symétrie ternaire et dont l'équation a la forme

$$(x^2+y^2)^2 + m U_1 U_2 U_3 + n(x^2+y^2) + p = 0,$$

$U_1 U_2 U_3$ représentant (égalé à zéro) trois droites passant par l'origine et faisant entre elles des angles de 60°. On voit que cette courbe a aussi trois axes de symétrie (qui sont perpendiculaires aux droites U_1, U_2 et U_3).

Mais il importe ici de remarquer que, pour les degrés supérieurs, l'existence, pour une courbe plane, d'un centre de symétrie ternaire n'entraîne pas celles d'axes de symétrie, de même que dès le quatrième ordre nous voyons que, pour les surfaces, l'axe de symétrie ternaire n'entraîne pas l'existence de plans de symétrie.

3° *Symétrie quaternaire.* — Les troisième, cinquième, sixième, huitième, dixième et onzième groupes de termes doivent disparaître de l'équation; les quatrième, septième et neuvième groupes doivent, égalés à des constantes quelconques, représenter des cercles; le deuxième doit, égalé à une constante, représenter une courbe du quatrième ordre à centre de symétrie quaternaire, c'est-à-dire coïncidant avec elle-même après une rotation de 90° autour de ce centre.

Il faut donc que ce groupe se reproduise par la transformation $x = -y'$, $y = +x'$, et pour cela qu'il ait la

forme $ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 - 4bxy^3 + ay^4$. Ainsi, l'équation se réduit à

$$(q) \left\{ \begin{array}{l} Az^4 + 4Bz^3 + 6Cz^2 + 4Dz + E \\ \quad + a(x^4 + 4mx^3y - 6nx^2y^2 - 4mxy^3 + y^4) \\ \quad + 6lz^2(x^2 + y^2) + 12Fz(x^2 - y^2) + 12N(x^2 + y^2) = 0. \end{array} \right.$$

La surface n'a pas, en général, de plan de symétrie passant par Oz. Elle en a un si $m = 0$. Elle est de révolution si $a = 0$. Les sections perpendiculaires à Oz sont des courbes de la forme

$$x^4 + 4mx^3y - 6nx^2y^2 - 4mxy^3 + y^4 + \lambda(x^2 + y^2) + \mu = 0$$

qui n'ont pas d'axe de symétrie en général, mais simplement un centre *de symétrie quaternaire*.

Des remarques aussi simples conduiraient aux formules des surfaces d'ordre supérieur au quatrième, possédant des axes de symétrie. Avec les surfaces du cinquième ordre apparait pour la première fois la symétrie quinaire.

Dans le cas des surfaces du troisième ordre, la symétrie binaire seule donne des surfaces pouvant n'avoir pas de plan de symétrie passant par l'axe; mais, dans celui des surfaces du quatrième ordre, l'existence des symétries ternaire et quaternaire n'entraîne pas plus que la symétrie binaire l'existence de tels plans de symétrie.

Au lieu de considérer les surfaces d'ordres supérieurs au quatrième, cherchons les équations des surfaces du troisième degré, présentant plus d'un axe de symétrie.

En considérant successivement les formules (β_1) et (β_2), groupant dans chacune, relativement à x, comme nous avons groupé relativement à z, nous déduirons par des raisonnements analogues, de (β_1) les formes

$$(\beta_1\beta_1') \qquad 6pxyz + 3rx^2 + 3ty^2 + 3Bz^2 + D = 0,$$

$$(\beta_1\beta_2') \qquad Az^3 + 3qzy^2 + 3mx^2z + 6sxy + 3Cz = 0,$$

et de (β_2) les formes

$$(\beta_2\beta'_1) \quad ax^3 + 3cxy^2 + 3hxz^2 + 6vyz + 3fx = 0,$$
$$(\beta_2\beta'_2) \quad dy^3 + 3kyz^2 + 3bx^2z + 6uxz + 3gy = 0,$$

représentant toutes des surfaces ayant aussi Ox pour axe de symétrie. En examinant ces quatre formes, on voit que les trois dernières se ramènent à un même type, qui sera par exemple (en prenant les coefficients à indices)

$$(\text{II}) \quad A_{111}x^3 + 3A_{122}xy^2 + 3A_{133}xz^2 + 6A_{234}yz + 4A_{144}x = 0.$$

La première équation peut s'écrire

$$(\text{I}) \quad 6A_{123}xyz + 3A_{114}x^2 + 3A_{224}y^2 + 3A_{334}z^2 + A_{444} = 0.$$

Pour les deux formes, le troisième axe Oy est aussi axe de symétrie binaire.

Si $A_{234} = 0$, la forme (II) représente des surfaces à centre, mais la forme (I) ne peut en représenter sans qu'il y ait dégénérescence.

Revenons aux formules (β_1) et (β_2) et cherchons si l'axe Ox peut être axe de symétrie ternaire.

La première représentera des surfaces ayant un tel axe si l'on a $p = m = s = C = 0$, $t = B$, $q = -3A$; elle se réduit alors à

$$(\text{III}) \quad A_{333}z(z^2 - 3y^2) + 3A_{224}(y^2 + z^2) + 3A_{114}x^2 + A_{444} = 0.$$

Pour (β_2), les conditions sont

$$b = u = g = 0, \qquad h = c, \qquad k = -3d$$

et l'équation devient

$$(\text{IV}) \quad \begin{cases} A_{111}x^3 + A_{222}y(y^2 - 3x^2) \\ \quad + 3A_{122}x(y^2 - z^2) + 6A_{234}yz = 0. \end{cases}$$

Les surfaces (III) ou (IV) ne peuvent avoir Oy pour axe de symétrie binaire sans se décomposer.

Il est inutile de chercher si le second axe Ox peut être quaternaire, car nous avons déjà vu que la présence d'un seul axe, s'il est quaternaire, entraîne la conséquence que la surface du troisième ordre est de révolution. Nous n'aurions donc que des cas particuliers de surfaces de révolution, savoir des cas de dégénérescence.

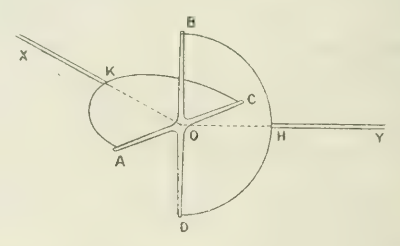
On traiterait d'une manière analogue le cas des surfaces du quatrième ordre ayant deux ou trois axes de symétrie de même espèce ou d'espèces différentes.

[R1e]

SUR LE JOINT DE CARDAN;

Par M. Th. CARONNET.

Le joint universel de Cardan est utilisé pour transformer une rotation autour de OX en une rotation autour de OY, l'angle $\widehat{XOY}$ étant compris entre 135° et 180°.



L'arbre OX est terminé par une fourchette AKC dont les extrémités sont traversées par l'une des branches AC d'un *croisillon*, dont l'autre branche BD, perpendiculaire à la première, lui est invariablement liée en O.

Le second arbre OY est pareillement terminé par une fourchette BHD qui s'articule de la même façon avec le croisillon.

La théorie de ce mécanisme consiste surtout dans le calcul du rapport des vitesses angulaires des arbres OX, OY, et nous nous proposons, dans cette Note, de donner un procédé simple, et nouveau, croyons-nous, pour arriver à ce résultat.

Supposons qu'on effectue une rotation autour de OX; on voit sans difficulté qu'on pourra passer d'une position du croisillon à une autre en le faisant participer à cette rotation et en lui imprimant une seconde rotation autour de AC.

Par suite le déplacement infinitésimal du croisillon est une rotation qui résulte de la composition des deux précédentes.

En vertu de la transmission du mouvement, cette rotation devra pouvoir se décomposer en deux autres, l'une autour de BD, la seconde autour de l'axe OY.

En résumé, si ω_1, ω'_1, ω_2, ω'_2 sont les valeurs algébriques des rotations autour des directions $\overline{OX}$, $\overline{OA}$, $\overline{OY}$, $\overline{OB}$, nous aurons, en projetant sur un axe quelconque,

$$(\omega_1) + (\omega'_1) = (\omega_2) + (\omega'_2).$$

Or, projetons sur $\overline{OX}$ et sur $\overline{OB}$, nous aurons, φ étant le supplément de l'angle XOY,

$$\omega_1 = -\omega_2 \cos\varphi + \omega'_2 \cos\widehat{BOX},$$

$$\omega_1 \cos\widehat{BOX} = \omega'_2;$$

d'où, en éliminant ω'_2,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{\cos\varphi}{\sin^2\widehat{BOX}}.$$

La direction $\overline{OB}$ balayant le plan perpendiculaire à OY en O, nous obtenons le Tableau suivant pour la variation de $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ lorsque l'arbre OX fait un tour complet :

$\widehat{BOX}$	$90^\circ - \varphi$	90°	$90^\circ + \varphi$	90°	$90^\circ - \varphi$
$-\frac{\omega_1}{\omega_2}$	$\frac{1}{\cos\varphi}$	$\cos\varphi$	$\frac{1}{\cos\varphi}$	$\cos\varphi$	$\frac{1}{\cos\varphi}$

Le rapport des vitesses angulaires des deux arbres oscille donc entre $\cos\varphi$ et $\frac{1}{\cos\varphi}$.

[O8e]

SUR LE DÉPLACEMENT D'UN TRIANGLE VARIABLE SEMBLABLE A UN TRIANGLE DONNÉ;

PAR M. M. D'OCAGNE.

Par une voie indirecte, M. Tarry a été amené au théorème suivant :

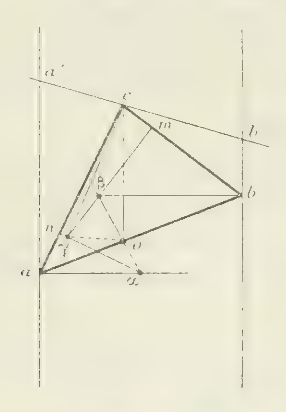
Si les sommets a et b du triangle abc, semblable à un triangle fixe, décrivent deux droites parallèles aa' et bb', l'ordre de la courbe décrite par le sommet c est égal à la classe de la courbe enveloppe du côté ab.

J'ai donné de ce théorème une démonstration par les coordonnées parallèles d'où j'ai déduit, en outre, quelques autres remarques (1). Je vais l'établir ici par une méthode purement géométrique, en observant d'ail-

(1) *Nouvelles Annales*, 3e série, t. VIII, p. 528, et t. IX, p. 471.

leurs qu'il suffit pour cela de faire voir que si le côté ab pivote autour d'un point, le sommet c décrit une droite.

Remarquons d'abord que les angles a, b et c étant



constants, les normales $o\alpha$ et $n\alpha$ aux enveloppes des côtés ab et ac se coupent en un point α de la normale en a à la courbe que décrit ce point, c'est-à-dire de la perpendiculaire $a\alpha$ à aa'. De même les normales $o\beta$ et $m\beta$ se coupent sur la perpendiculaire $b\beta$ à bb', et la normale $c\gamma$ au lieu décrit par c passe par le point de rencontre γ des normales $n\alpha$ et $m\beta$.

En outre, le triangle $\alpha\beta\gamma$ ayant ses côtés respectivement perpendiculaires à ceux du triangle abc est semblable à ce triangle ([1]).

En raison du parallélisme des droites $a\alpha$ et $b\beta$, on a

$$\frac{o\alpha}{o\beta} = \frac{oa}{ob}.$$

Il en résulte que les droites oc et $o\gamma$ sont homologues dans les deux triangles et, par suite, que les triangles

---

([1]) Cas particulier d'une propriété donnée par M. Mannheim dans son *Cours de Géométrie descriptive*, 2e édition, p. 171.

$oc\gamma$ et $ob\beta$ sont semblables. Donc, l'angle que $c\gamma$ fait avec son homologue $b\beta$ est égal à l'angle cob, et, si nous prenons la tangente $a'b'$, en c, à la courbe que décrit ce point, c'est-à-dire la perpendiculaire à $c\gamma$, nous voyons que l'angle que cette tangente fait avec bb', perpendiculaire à $b\beta$, est égal à l'angle cob.

De là ce théorème :

L'angle que la tangente à la courbe décrite par le point c fait avec la direction des parallèles aa' et bb' est égal à l'angle que la droite joignant le point c au point o, où le côté ab touche son enveloppe, fait avec ce côté.

La propriété énoncée plus haut résulte immédiatement de ce dernier théorème. En effet, *si le côté ab pivote autour du point o*, le rapport $\frac{oa}{ob}$ étant constant, l'angle que oc fait avec ab l'est aussi ; par suite, la tangente à la courbe que décrit le point c a une direction constante et *cette courbe est une droite.*

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES EN 1897;

Par M. Richard,
Professeur au lycée de Tours.

Soit oabc un tétraèdre T trirectangle au sommet o et dont les arêtes oa, ob, oc ont la même longueur l, et d le centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre. On suppose que le tétraèdre T se déplace par rapport à un trièdre trirectangle fixe OX, OY, OZ, *de manière*

que les points A, B, C, D *décrivent respectivement des plans qui ont pour équations* $Y + Z = 0$, $Z + X = 0$, $X + Y = 0$, $X + Y + Z + \frac{l}{2} = 0$.

1° *Démontrer que les points symétriques de* A, B, C, D, *par rapport aux arêtes du tétraèdre, décrivent également des plans.*

2° *Trouver l'équation de la surface* S, *décrite par le sommet* o *du tétraèdre* T. S *est du quatrième ordre avec un point triple et trois droites doubles.*

3° *Par chaque point* α *d'une droite double passent deux droites* δ *et* δ' *qui rencontrent la surface* S *en quatre points confondus. Pour quelles positions de* α, δ *et* δ' *coïncident-elles?*

4° *Tout plan tangent à la surface* S *coupe* S *suivant deux coniques. Ces deux coniques se confondent pour quatre positions particulières du plan tangent.*

X, Y, Z, x, y, z étant les coordonnées d'un même point M par rapport au trièdre fixe et au trièdre mobile, on a les formules de transformation de coordonnées

$$(1)\quad \begin{cases} X = x_0 + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z', \quad Y = y_0 + \beta x' + \beta' y' + \beta'' z', \\ Z = z_0 + \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z'. \end{cases}$$

On obtiendra les coordonnées du point A, par exemple, en faisant $x' = l$, $y' = z' = 0$. On aura donc, pour ces coordonnées,

$$X_a = x_0 + \alpha l, \qquad Y_a = y_0 + \beta l, \qquad Z_a = z_0 + \gamma l.$$

En exprimant que ce point est dans le plan $Y + Z = 0$, on aura l'équation

$$(2)\qquad y_0 + z_0 + (\beta + \gamma) l = 0;$$

de même, puisque le point B est dans le plan $Z + X = 0$,

$$(3)\qquad z_0 + x_0 + (\gamma' + \alpha') l = 0.$$

et, puisque le point C est dans le plan $X + Y = 0$,

$$(4) \qquad x_0 + y_0 + (\alpha'' + \beta'')l = 0.$$

Enfin, le point D $\left(x' = \frac{l}{2},\ y' = \frac{l}{2},\ z' = \frac{l}{2}\right)$ étant dans le plan $X + Y + Z + \frac{l}{2} = 0$, on a la relation

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & x_0 + y_0 + z_0 \\ & \quad + [\alpha - \alpha' + \alpha'' - \beta - \beta' - \beta'' - \gamma + \gamma' - \gamma'' + 1]\frac{l}{2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Entre (2), (3), (4), (5), **éliminons** x_0, y_0, z_0 ; **on trouve, par un calcul facile, la relation**

$$(6) \qquad \alpha + \beta' - \gamma'' = 0.$$

Les formules d'Olinde Rodrigues donnent les neuf cosinus en fonction de trois paramètres λ, μ, ν, ou mieux en fonction de quatre paramètres homogènes λ, μ, ν, ρ ; en posant pour abréger $\Delta = \rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$, on a

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\rho^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2}{\Delta}, & \alpha' &= \frac{2[\lambda\mu - \nu\rho]}{\Delta}, & \alpha'' &= \frac{2[\lambda\nu + \mu\rho]}{\Delta}, \\ \beta &= \frac{2[\lambda\mu - \nu\rho]}{\Delta}, & \beta' &= \frac{\rho^2 - \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2}{\Delta}, & \beta'' &= \frac{2[\mu\nu - \lambda\rho]}{\Delta}, \\ \gamma &= \frac{2[\lambda\nu - \mu\rho]}{\Delta}, & \gamma' &= \frac{2[\mu\nu + \lambda\rho]}{\Delta}, & \gamma'' &= \frac{\rho^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2}{\Delta}; \end{aligned} \right.$$

en ayant égard à ces formules, la relation (6) devient $\rho^2 = 0$; ainsi ρ est nul. Dès lors, les formules (7) se simplifient.

Résolvons maintenant les équations (2), (3), (4) par rapport à x_0, y_0, z_0, puis remplaçons-y les cosinus par leurs valeurs tirées de (7) ; on trouve, par un calcul facile,

$$(8) \qquad x_0 = -\frac{2\mu\nu l}{\Delta}, \qquad y_0 = -\frac{2\nu\lambda l}{\Delta}, \qquad z_0 = -\frac{2\lambda\mu l}{\Delta},$$

où $\Delta = \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2$.

Alors les formules (1), où l'on aura remplacé x_0, y_0, z_0 et les neuf cosinus par leurs valeurs, donneront les coordonnées par rapport aux axes fixes d'un point de la surface décrite par un point quelconque de la figure mobile.

Le symétrique de A, par exemple, a pour coordonnées $x' = -l$, $y' = 0$, $z' = 0$; on a donc pour ce point

$$\Delta X = -2\mu\nu l + (\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2) l,$$
$$\Delta Y = -2\nu\lambda l + 2\lambda\mu l,$$
$$\Delta Z = -2\lambda\mu l - 2\nu\lambda l;$$

d'où l'on déduit facilement $Y - Z = 0$. C'est l'équation d'un plan que décrit ce point.

De même, les symétriques de B et C décrivent respectivement les plans $Z - X = 0$, $X - Y = 0$.

Le symétrique de D, par rapport à Oz', a pour coordonnées $x' = -\frac{l}{2}$, $y' = -\frac{l}{2}$, $z' = \frac{l}{2}$, de sorte que ses coordonnées par rapport aux axes fixes sont données par les formules

$$\frac{\Delta X}{l} = -2\mu\nu - \frac{\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2}{2} - \lambda\mu - \lambda\nu,$$
$$\frac{\Delta Y}{l} = -2\nu\lambda - \mu\lambda - \frac{\mu^2 - \lambda^2 - \nu^2}{2} - \mu\nu,$$
$$\frac{\Delta Z}{l} = -2\lambda\mu - \lambda\nu - \mu\nu + \frac{\nu^2 - \lambda^2 - \mu^2}{2};$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Delta}{2}(X + Y - Z) = \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{2} = \frac{\Delta}{2},$$

et par suite, ce point décrit le plan

$$X + Y - Z = 0;$$

de même les deux autres symétriques de D décrivent les plans

$$Y + Z - X = 0, \qquad Z + X - Y = 0.$$

2° D'après les formules (8), on a, pour les coordonnées du sommet du tétraèdre T,

$$x = -\frac{2\mu\nu l}{\Delta}, \qquad y = -\frac{2\nu\lambda l}{\Delta}, \qquad z = -\frac{2\lambda\mu l}{\Delta},$$

pour trouver l'équation du lieu de ce point, remarquons que

$$\frac{yz}{x} = -\frac{2\lambda^2 l}{\Delta}, \qquad \frac{zx}{y} = -\frac{2\mu^2 l}{\Delta}, \qquad \frac{xy}{z} = -\frac{2\nu^2 l}{\Delta};$$

ajoutons et remplaçons $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$ par Δ; on a

$$+\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} = -2l$$

ou bien

$$y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 + 2lxyz = 0.$$

C'est l'équation de la surface cherchée.

On voit immédiatement que l'origine est un point triple, et les axes de coordonnées des lignes doubles.

3° Une droite passant par un point de l'un des axes, par exemple de OX, a pour équations

$$x = \alpha + \lambda u, \qquad y = \lambda v, \qquad z = \lambda w.$$

Substituant dans l'équation de la surface et divisant par λ^2, on a

$$(\alpha + \lambda u)^2(v^2 + w^2) + v^2w^2\lambda^2 + 2l(\alpha + \lambda u)vw = 0;$$

pour que cette équation ait encore la racine double $\lambda = 0$, il faut et il suffit que le coefficient de λ et le terme indépendant soient nuls; ceci donne

$$\alpha(v^2 + w^2) + 2lvw = 0,$$
$$u[\alpha(v^2 + w^2) + lvw] = 0;$$

ces deux équations donnent $u = 0$, et l'équation en $\frac{v}{w}$

$$\alpha\frac{v^2}{w^2} + 2l\frac{v}{w} + \alpha = 0;$$

on a donc bien deux solutions à la question. Les deux droites obtenues sont confondues, si $\alpha = \pm l$.

4° Un plan quelconque coupe la surface suivant une quartique ayant trois points doubles (un sur chaque axe). Si ce plan est tangent, il y a en outre un point double au point de contact. La courbe ayant plus de trois points doubles se décompose ; elle ne se décompose pas en une droite et une cubique, car trois des points doubles seraient en ligne droite ; elle se décompose donc bien en deux coniques.

Considérons le point du plan dont les coordonnées trilinéaires sont λ, μ, ν : à chaque point du plan correspond le point de la surface dont les coordonnées sont

$$x = -\frac{2\mu\nu l}{\Delta}, \qquad y = -\frac{2\nu\lambda l}{\Delta}, \qquad z = -\frac{2\lambda\mu l}{\Delta};$$

un plan $Ax + By + Cz + D = 0$ coupe la surface suivant la quartique qui a pour correspondante la courbe plane

$$2A\mu\nu l + 2B\nu\lambda l + 2C\lambda\mu l - D\Delta = 0,$$

où $\Delta = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$.

Cette conique se décompose en deux droites si le plan est tangent. Ceci fournit sans peine l'équation tangentielle de la surface.

Si

$$A = B = C = \frac{-D}{l},$$

on voit que le premier membre de l'équation de la conique est le carré de $\lambda + \mu + \nu$; on verra de même que si $A = -B = -C = -\frac{D}{l}$ ou si $-A = B = -C = -\frac{D}{l}$ ou si $-A = -B = C = -\frac{D}{l}$, le plan coupe la surface suivant des coniques confondues ayant pour représentations planes les droites $\lambda - \nu - \mu = 0$, $\nu - \lambda + \mu = 0$,

$\mu + \lambda - \nu = 0$; ce qui achève de démontrer la dernière partie de l'énoncé.

Voir, au sujet de ce problème, une Note de M. Darboux, à la fin de la *Cinématique* de M. Kœnigs.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1764.

(1897, p. 196.)

Soit $f(x) = 0$ une équation réciproque de degré $2m$, n'ayant pas de racine commune avec $x^4 - 1 = 0$.

Si l'on pose $x = \frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{y}-1}$, l'équation en y est de degré m, et le produit de ses racines est égal à $(-1)^m \frac{f(-1)}{f(1)}$.

Si l'on pose $x + \frac{1}{x} = 2i$, le produit des racines de l'équation transformée est égal à

$$\frac{(-1)^{m-\frac{m\pi i}{2}}}{2^m} \cdot \frac{f(\sqrt{-1})}{f(0)}.$$

Application à l'équation binome. (A. Pellet.)

SOLUTION

Par M. E. Taratte.

De la relation $x = \frac{\sqrt{y}+1}{\sqrt{y}-1}$, on tire

$$y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = -\frac{(x+1)\left(\frac{1}{x}+1\right)}{(x-1)\left(\frac{1}{x}-1\right)},$$

ou, en mettant des indices aux lettres,

$$x_p = (-1)\,\frac{(x_p+1)\left(\dfrac{1}{x_p}-1\right)}{(x_p-1)\left(\dfrac{1}{x_p}-1\right)}.$$

En donnant à p les valeurs 1, 2, 3, ..., m dans cette formule, on obtiendra m équations qui, étant multipliées entre elles membre à membre, donneront

$$y_1 y_2 y_3 \ldots y_m$$
$$= (-1)^m\,\frac{(x_1+1)\left(\dfrac{1}{x_1}+1\right)(x_2+1)\left(\dfrac{1}{x_2}+1\right)\ldots(x_m+1)\left(\dfrac{1}{x_m}+1\right)}{(x_1-1)\left(\dfrac{1}{x_1}-1\right)(x_2-1)\left(\dfrac{1}{x_2}-1\right)\ldots(x_m-1)\left(\dfrac{1}{x_m}-1\right)}.$$

Le numérateur du second membre est, à un facteur constant près, le produit des racines de la transformée $f(x-1)=0$, c'est-à-dire qu'il est égal à $\dfrac{f(-1)}{f(0)}$; le dénominateur est de même le produit des racines de la transformée $f(x+1)=0$: il est donc égal à $\dfrac{f(1)}{f(0)}$, car $f(0)$ est égal au coefficient de x^{2m} puisque l'équation $f(x)=0$ est réciproque; on aura donc

$$y_1 y_2 y_3 \ldots y_m = (-1)^m\,\frac{f(-1)}{f(1)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Deuxièmement, la relation $x+\dfrac{1}{x}=2z$ peut s'écrire

$$2z = (i)(x-i)\left(\frac{1}{x}-i\right),$$

d'où, avec des indices,

$$2z_p = (i)(x_p-i)\left(\frac{1}{x_p}-i\right),$$

et

$$z_p = \frac{(i)}{2}(x_p-i)\left(\frac{1}{x_p}-i\right);$$

en donnant, dans cette dernière formule, à p les valeurs 1, 2, 3, ..., m, et multipliant membre à membre les équations

ainsi obtenues, il viendra

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_m = \frac{(i)^m}{2^m}(x_1 - i)\left(\frac{1}{x_1} - i\right)(x_2 - i)\left(\frac{1}{x_2} - i\right)\ldots(x_m - i)\left(\frac{1}{x_m} - i\right),$$

ce qui peut s'écrire, d'après ce qui précède,

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_m = \frac{(i)^m}{2^m}\frac{f(i)}{f(0)};$$

mais

$$i = (-1)(-i) = (-1)e^{-\frac{\pi i}{2}}, \qquad (i)^m = (-1)^m e^{-\frac{m\pi i}{2}},$$

et, par suite,

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_m = \frac{(-1)^m e^{-\frac{m\pi i}{2}}}{2^m}\frac{f(i)}{f(0)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Application à l'équation binome. — Une équation binome du degré $2m$, n'ayant aucune racine commune avec $x^4 - 1 = 0$, est nécessairement de la forme $x^{2m} + 1 = 0$, m étant pair.

1er cas :

$$y_1 y_2 y_3 \ldots y_m = (-1)^m \frac{2}{2} = 1.$$

2e cas :

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_m = \frac{(-1)^m\left(\cos - \frac{m\pi}{2} + i\sin\frac{m\pi}{2}\right)}{2^m}\frac{2}{1} = \pm\frac{1}{2^{m-1}},$$

$+$ ou $-$ selon que $\frac{m}{2}$ est pair ou impair.

QUESTIONS.

1783. Étant donnés deux tétraèdres, dont les sommets sont les huit points communs à trois quadriques, on leur circonscrit deux quadriques tangentes entre elles en tous les points d'une courbe plane : enveloppe du plan de cette courbe.

(E. Duporq.)

PREMIER CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1898.

Sujet.

Exposer, en les résumant, les diverses théories qui ont été successivement faites dans l'étude de la stabilité de l'équilibre des corps flottants, depuis la théorie du métacentre imaginée par Bouguer jusqu'aux travaux tout récents de M. Duhem.

Principaux travaux à consulter :

BOUGUER. — Traité du navire, de sa construction et de ses mouvements; Paris, 1746.

DUHAMEL. — Mémoire sur la stabilité des corps flottants; Paris, 1832. — Note sur divers principes de Mécanique (*Journal de l'École Polytechnique*, XXIVe Cahier, 1835).

POISSON. — Traité de Mécanique, Tome II.

A. BRAVAIS. — Sur l'équilibre des corps flottants (Thèse soutenue à Lyon, 5 octobre 1837).

MOSELEY. — On the dynamical stability and on the oscillations of floating bodies; London, 1850.

CLEBSCH. — Ueber das Gleichgewich stchwimmender Körper (*Journal de Crelle*, 1860).

F. REECH. — Cours de l'École du Génie maritime.

C. JORDAN. — Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 1887).

E. GUYOU. — Théorie nouvelle de la stabilité de l'équilibre des corps flottants (*Revue maritime et coloniale*, 1879).

P. DUHEM. — Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. I; 1895).

Conditions.

Le concours est ouvert *exclusivement* aux abonnés des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Le meilleur Mémoire envoyé en réponse au sujet proposé donnera droit, au profit de l'auteur :

1° A un crédit de 100fr d'Ouvrages à choisir dans le catalogue de MM. Gauthier-Villars et fils;

2° A la publication du Mémoire;

3° A un tirage à part gratuit de 100 exemplaires.

Les manuscrits devront être parvenus à la rédaction AVANT LE 15 MAI 1898, terme d'absolue rigueur.

Les auteurs pourront, à leur gré, se faire immédiatement connaître, ou garder provisoirement l'anonyme. Dans ce dernier cas, le Mémoire portera un signe, une devise ou un numéro d'ordre arbitraire, et sera accompagné d'un pli cacheté renfermant, avec la même indication, le nom et l'adresse de l'auteur et la justification de sa qualité d'abonné. Les plis cachetés en question ne seront ouverts par la Rédaction qu'à partir du 15 mai et après le jugement prononcé.

Aucune limite n'est fixée quant à l'étendue des Mémoires; mais, à mérite égal, les plus concis seraient préférés par les juges du Concours. Chacun comprendra du reste que l'insertion d'un travail trop étendu serait matériellement impossible.

Le jugement du Concours sera prononcé avant le 15 juillet 1898, et le résultat en sera, sans retard, publié dans le journal.

La Rédaction, et les juges du Concours qui se seront associés à elle, se réservent la faculté :

1° De partager les récompenses ci-dessus mention-

nées, au cas *tout à fait exceptionnel* où deux Mémoires y auraient droit avec un égal mérite ;

2° De ne pas attribuer de récompenses si, parmi les Mémoires envoyés, aucun ne semblait en être digne. Dans ce dernier cas, les avantages stipulés seraient reportés sur un Concours ultérieur, et l'annonce en serait faite dans le journal en temps utile.

L'auteur du Mémoire récompensé sera immédiatement avisé par la Rédaction et voudra bien faire immédiatement connaître s'il désire que la publication de son Travail ait lieu sous son nom, ou sous forme anonyme. Son silence serait interprété comme une autorisation de publier le nom.

LES RÉDACTEURS.

LES CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

La Licence ès Sciences a été profondément modifiée par le décret du 22 janvier 1896. La Licence ès Sciences mathématiques n'existe plus ; il n'y a maintenant qu'un grade unique de *licencié ès Sciences* : pour l'obtenir, il faut justifier de la possession de trois *Certificats d'études supérieures*, délivrés par les Facultés des Sciences à partir de juillet 1897. Les matières auxquelles correspond chacun des certificats varient suivant les Facultés.

En ce qui concerne les Sciences mathématiques, nous croyons utile d'en donner ici le Tableau :

Paris. — *Calcul différentiel et Calcul intégral.* — *Mécanique rationnelle.* — *Astronomie.* — *Analyse supé-*

rieure. — Géométrie supérieure. — Mécanique céleste. — Physique mathématique. — Mécanique physique et expérimentale.

Besançon. — *Calcul différentiel et intégral. — Mécanique rationnelle. — Astronomie. — Chronométrie théorique et pratique. — Mécanique appliquée.*

Bordeaux. — *Mathématiques préparatoires aux enseignements de Mathématiques et de Physique (Calcul différentiel et intégral, Mécanique, Cosmographie). — Calcul différentiel et intégral. — Mécanique rationnelle. — Astronomie.*

Caen. — *Éléments généraux de Mathématiques (Géométrie analytique, éléments de Calcul différentiel et intégral et de Mécanique, Trigonométrie sphérique et ses applications à l'Astronomie). — Analyse infinitésimale. — Mécanique.*

Clermont. — *Calcul différentiel et intégral. — Mécanique. — Astronomie.*

Dijon. — *Calcul différentiel et intégral. — Mécanique rationnelle. — Astronomie.*

Grenoble. — *Calcul différentiel et intégral. — Mécanique rationnelle. — Astronomie. — Analyse supérieure.*

Lille. — *Calcul différentiel et intégral. — Mécanique rationnelle. — Géométrie supérieure. — Astronomie. — Mécanique appliquée.*

Lyon. — *Calcul différentiel et intégral. — Mécanique rationnelle et appliquée. — Astronomie.*

Marseille. — *Analyse infinitésimale. — Mécanique. — Astronomie.*

Montpellier. — *Calcul différentiel et intégral. — Mécanique rationnelle. — Algèbre supérieure ou Astronomie.*

Nancy. — *Calcul différentiel et intégral. — Mécanique rationnelle. — Astronomie. — Analyse supérieure. — Algèbre supérieure. — Géométrie supérieure.*

Poitiers. — *Calcul différentiel et intégral. — Mécanique rationnelle. — Astronomie.*

Rennes. — *Calcul différentiel et intégral. — Mécanique rationnelle. — Astronomie.*

Toulouse. — *Calcul différentiel et intégral. — Méca-*

nique rationnelle. — Mécanique appliquée. — Astronomie ou Mécanique céleste. — Géométrie supérieure. — Algèbre et Analyse supérieure.

Nos lecteurs comprendront que, dans leur propre intérêt comme dans celui du journal, il nous serait impossible de reproduire désormais *tous* les sujets de composition proposées en vue de ces certificats par les diverses Facultés, ainsi que nous le faisions pour l'ancienne Licence.

Les *Nouvelles Annales* se transformeraient alors en un simple Recueil d'énoncés.

Mais nous sommes très éloignés cependant de vouloir nous désintéresser de cet enseignement, bien au contraire; et quelques explications à ce sujet paraissent indispensables. Nous prions instamment nos Correspondants appartenant aux Facultés de vouloir bien, comme par le passé, nous envoyer *tous* les sujets de compositions après chaque session. Mais ils nous permettront d'opérer une sélection, et elle aura lieu en principe sur les bases suivantes : nous éliminerons tous les sujets consistant simplement en questions de cours, ainsi que les exercices identiques à des sujets récemment insérés, ou n'offrant avec ceux-ci que de légères différences.

En Astronomie, particulièrement, nous ne rappellerons que de loin en loin les énoncés avec données numériques.

Si le résultat de cette première élimination est encore trop abondant, nous accorderons une préférence particulière aux sujets qui nous sembleront présenter un caractère de problèmes-types, et en évitant les doubles emplois. Nous insérerons aussi tous les énoncés qui paraîtraient avoir une originalité particulière et un caractère de nouveauté.

A ce propos, nos Correspondants seront assez aimables

pour nous signaler les sujets auxquels ils attacheraient un intérêt spécial, et dont pour ce motif ils désireraient l'insertion. Cet avis aura pour nous le plus grand prix, et nous nous y conformerons scrupuleusement, dans toute la mesure du possible.

Aucune solution détaillée, bien entendu, ne saurait, en général, suivre les énoncés. Tout au plus, parfois, donnerons-nous les indications très sommaires, et de nature à faciliter les solutions, que nos Correspondants auraient jugé utile de nous envoyer, en même temps que le sujet.

Mais lorsqu'un sujet déterminé aura, par sa nature même, un intérêt plus élevé que celui d'un exercice ordinaire, ou pourra fournir matière à des remarques originales, nous en publierons volontiers, ultérieurement, une solution détaillée qui nous serait adressée par l'un de nos lecteurs. Il est probable que sur chacune des matières des certificats nous aurons ainsi, chaque année, un certain nombre de solutions dont la publication sera précieuse pour les candidats. Ce seront, en effet, de véritables modèles de compositions, propres à les guider dans leurs futurs examens.

Les *Nouvelles Annales* seront d'autant plus heureuses de continuer à apporter ainsi un concours continuel aux candidats des Facultés des Sciences, que ces derniers ne sauraient le trouver dans aucun autre Recueil périodique. Il y a en effet un grand nombre de journaux mathématiques destinés aux élèves de Mathématiques spéciales; il y en a d'autres contenant des Mémoires importants de haute Mathématique. Mais aucun ne pouvait, sans sortir de son cadre, entreprendre la tâche que nous nous sommes imposée, en ce qui concerne l'enseignement des Facultés.

En dehors des insertions dans les *Nouvelles Annales*,

les étudiants qui se préparent aux divers certificats peuvent toujours s'adresser à la Rédaction pour les conseils ou les renseignements scientifiques qui pourraient leur être utiles, et nous serons heureux de les leur donner, dans les limites où nous le pourrons.

Nous croyons devoir profiter de cette circonstance pour remercier nos Correspondants des villes où siègent les Facultés, et leur demander la continuation de leur précieux concours, dont la régularité décuplera le prix.

LES RÉDACTEURS.

[B 10a]

SUR LA RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES BINAIRES;

PAR M. A. HURWITZ, de Zurich.

Extrait des *Congress mathematical Papers*, t. I.
Exposition de Chicago, 1893.

(Traduit avec l'autorisation de l'auteur par M. L. LAUGEL.)

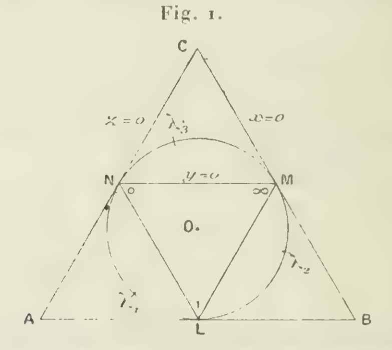
La méthode d'après laquelle j'établis, dans les pages suivantes, la théorie de la réduction des formes quadratiques à deux indéterminées repose sur ce principe qui consiste à rechercher les formes *dégénérées*, c'est-à-dire les formes de déterminant évanouissant, puis de celles-ci à remonter aux formes *générales*, c'est-à-dire aux formes de déterminant non évanouissant. Ce principe se montre d'une grande fécondité; non seulement il conduit au but très aisément dans le cas ici traité des formes binaires à coefficients réels, mais il est encore applicable aussi

aux formes à nombre quelconque d'indéterminées, que les coefficients soient supposés réels ou bien complexes.

Pour faire ressortir clairement le point central de la recherche et pour arriver en même temps à l'intuition la plus évidente possible je donnerai aux considérations en question une forme géométrique particulière. Il n'y a, du reste, aucune difficulté à rendre plus générale la représentation géométrique (en admettant la généralisation projective) ou encore à remplacer la représentation géométrique par le traitement purement analytique.

1. Soient ABC un triangle équilatéral, K le cercle inscrit, auquel sont tangents les côtés du triangle aux points M, N, L (voir *fig.* 1). Ces points partagent la

Fig. 1.



circonférence du cercle en trois arcs égaux MN, NL, LM, que je nommerai les *arcs partiels* (Theilbogen).

Je choisis maintenant CNM comme triangle de référence et le point L comme point 1. Alors le point

$$x : y : z = 1 : \lambda : \lambda^2$$

décrit la circonférence de K lorsque le paramètre λ parcourt tous les nombres réels. Par suite de ce fait je désignerai chaque point de la circonférence par la valeur

correspondante du paramètre, en sorte que les points M, N, L par exemple prennent alors la désignation ∞, o, 1.

Désignons ensuite par T cette rotation du plan autour du point O, centre du cercle K, pour laquelle le point o se transforme en 1, 1 en ∞, ∞ en o, et T^2 cette rotation pour laquelle o se transforme en ∞, ∞ en 1, 1 en o.

Si λ_1, λ_2, λ_3 désignent des points situés d'une manière correspondante sur les trois arcs partiels NL, LM, MN, alors pour la rotation T, λ_1 se transforme en λ_2, λ_2 en λ_3 et λ_3 en λ_1. Comme le rapport anharmonique de quatre points sur la circonférence n'est pas altéré par la rotation T, l'on trouve aisément que

$$(2) \qquad \lambda_2 = \frac{1}{1-\lambda_1}, \qquad \lambda_3 = 1 - \frac{1}{\lambda_1}.$$

Dans ce qui suit, ce sont particulièrement les points à paramètre RATIONNEL qui jouent un rôle important, et ce sont à ces points que se rapportent les propositions et définitions qui suivent. Une corde $s = pq$ du cercle K sera dite une *corde élémentaire* lorsque $p = \frac{\beta}{\alpha}$, $q = \frac{\delta}{\gamma}$ sont des nombres rationnels entre lesquels a lieu l'équation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

En s'appuyant sur les équations (2) l'on démontre facilement qu'une corde élémentaire est transformée par la rotation T (et de même par la relation T^2) en une corde élémentaire.

Maintenant le théorème suivant est d'une importance capitale :

I. *Les extrémités p et q d'une corde élémentaire s sont toujours situées sur le même arc partiel.*

Je démontrerai que, si l'on admet par hypothèse que p

et q sont situés sur des arcs partiels différents, on est alors conduit à des contradictions. Dans cette hypothèse il y a essentiellement trois cas à distinguer, cas qui correspondent aux trois combinaisons des arcs partiels pris deux à deux. On peut s'en tenir au cas où l'on suppose p situé sur l'arc MN, et par conséquent où le nombre $p \leqq 0$ et où q est situé sur l'arc LM et par conséquent où le nombre $q \geqq 1$. En effet, chacun des deux autres cas peut être ramené au précédent au moyen d'une des rotations T et T^2. Maintenant, lorsque $p \leqq 0$, $q \geqq 1$, l'on a, par suite, $1 \leqq q - p \leqq \infty$. Mais l'unique combinaison $p = 0$, $q = 1$, pour laquelle on ait $p - q = 1$, doit être exclue; en effet, pour cette combinaison p et q sont situés sur le même arc, ici l'arc LN. On ne peut pas davantage avoir $q - p = \infty$; c'est-à-dire qu'un des deux nombres p et q ne peut pas être égal à ∞, car autrement p et q seraient tous deux situés sur l'arc ML, ou bien le seraient de même sur l'arc MN. Par suite $q - p = \pm \frac{1}{\alpha\gamma}$ est situé *entre* 1 et ∞ et par conséquent $\pm \alpha\gamma$ l'est entre 0 et 1. Mais ceci est absurde, puisque α et γ sont des nombres *entiers*.

Maintenant un triangle, inscrit dans le cercle K et dont les côtés sont des cordes élémentaires, je le nommerai un *triangle élémentaire*. D'après cette définition le triangle $0\,1\,\infty$ est un triangle élémentaire. *Toute corde élémentaire $s = pq$ est côté commun de deux triangles élémentaires.*

En effet soient $p = \frac{\beta}{\alpha}$, $q = \frac{\delta}{\gamma}$ et $r = \frac{\zeta}{\varepsilon}$ un troisième nombre rationnel quelconque. Alors, si l'on détermine x, y au moyen des équations

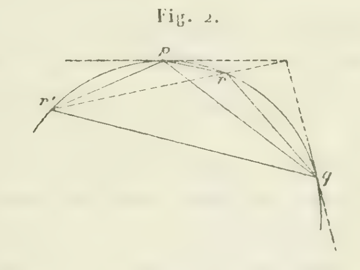
$$\zeta = x\beta + y\delta,$$
$$\varepsilon = x\alpha + y\gamma,$$

on reconnaît que p, q, r forment un triangle élémentaire lorsque l'on a, et seulement lorsque l'on a $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. La corde s est par conséquent côté commun des deux triangles élémentaires

$$p, q, r = \frac{\beta + \delta}{\alpha + \gamma} \qquad \text{et} \qquad p, q, r' = \frac{\beta - \delta}{\alpha - \gamma}.$$

Comme les points p, q sont séparés harmoniquement par les points r, r' le triangle pqr' peut être obtenu au moyen d'une construction très simple lorsque le triangle pqr est donné (*fig.* 2). De plus ce même fait nous

Fig. 2.



montre que les deux triangles élémentaires que l'on peut construire ayant une même corde élémentaire, $s = pq$, comme côté commun, sont situés de part et d'autre de cette corde.

En vertu du théorème I les sommets d'un triangle élémentaire qui n'est pas le triangle $0\,1\,\infty$ sont nécessairement situés sur le même arc partiel. Par conséquent le triangle $0\,1\,\infty$ ne peut avoir aucune portion de surface en commun avec un autre triangle élémentaire. On a, par conséquent, le théorème :

II. *Aucun point situé à l'intérieur du triangle* $0\,1\,\infty$ *ne peut être situé en même temps à l'intérieur d'un autre triangle élémentaire.*

2. Maintenant, à toute forme quadratique

$$(3)\qquad f = au^2 + 2buv + cv^2$$

peuvent être adjoints ces points dont les coordonnées sont

$$(4)\qquad x : y : z = a : b : c.$$

A une forme f correspond alors un point à l'intérieur, sur la circonférence, ou bien à l'extérieur du cercle K, selon que l'on a respectivement

$$(5)\qquad D = b^2 - ac \lesseqgtr 0.$$

Réciproquement, à tout point $a : b : c$ correspond une infinité de formes f, notamment les formes

$$(6)\qquad f = \rho(au^2 + 2buv + cv^2),$$

où ρ peut prendre chaque valeur réelle. Maintenant, pour rendre uniforme (eindeutig, univoque), la relation entre les points du plan et les formes f, je regarderai deux formes où les coefficients respectifs sont proportionnels entre eux, comme n'étant pas distinctes entre elles. On remarquera encore qu'au point λ de la circonférence du cercle K correspond la forme

$$(7)\qquad f = \rho(u^2 + 2\lambda uv + \lambda^2 v^2) = \rho(u + \lambda v)^2.$$

Je considère encore une transformation linéaire quelconque à coefficients nombres entiers

$$(8)\qquad \left.\begin{aligned} u &= \alpha u' + \beta v' \\ v &= \gamma u' + \delta v' \end{aligned}\right\} (S), \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Par l'effet de cette transformation S, la forme (6) est transformée en

$$(9)\qquad f' = \rho(a'u'^2 + 2b'u'v' + c'v'^2)$$

où

$$(10)\qquad \begin{cases} a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, \\ b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta, \\ c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2. \end{cases}$$

A la transformation S correspond par conséquent une collinéation (transformation homographique) du plan, définie par les formules (10), que l'on peut également désigner par S.

Le cercle K se transforme en lui-même par l'effet de la collinéation S. En effet, au point λ de la circonférence de K correspond la forme (7) qui, par l'effet de la transformation (8), se change en

$$\rho(\alpha + \lambda\gamma)^2 \left(u' + \frac{\delta\lambda - \beta}{\gamma\lambda + \alpha} v'\right)^2,$$

en sorte que le point λ, par l'effet de la collinéation S, est transformé en le point

$$(11)\qquad \lambda' = \frac{\delta\lambda - \beta}{\gamma\lambda + \alpha}.$$

Comme, d'après cela, les points 0, ∞, 1, se transforment respectivement en

$$p = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad q = \frac{\delta}{\gamma}, \qquad r = \frac{\delta + \beta}{\gamma + \alpha},$$

alors, aux points qui sont situés à l'intérieur du triangle 01∞, correspondent les points à l'intérieur du triangle élémentaire pqr. Par conséquent, si l'on nomme une forme f de déterminant négatif *forme réduite* lorsque le point qui lui correspond est situé à l'intérieur du triangle 01∞, l'on conclut du théorème II du n° 1 :

Une forme réduite peut seulement être de nouveau transformée en une forme réduite au moyen de la transformation S lorsque les points 0, 1, ∞ par l'effet de la

collinéation correspondante S [ou par l'effet de la transformation (11)], s'échangent seulement entre eux.

Évidemment alors, abstraction faite de la transformation identique, il existe deux pareilles transformations S : ce sont celles qui ont pour collinéations correspondantes les rotations T et T^2. On a donc le théorème :

Deux formes réduites, auxquelles correspondent les points P *et* Q, *sont équivalentes lorsque, et seulement lorsque le point* P *est transformé en le point* Q *par l'une des rotations* T *et* T^2.

Abstraction faite du centre O du cercle K, les points du triangle $o1\infty$, et de même les formes réduites qui leur correspondent se groupent trois par trois par l'effet des rotations T et T^2, et cela de telle sorte que les trois formes d'un groupe sont équivalentes entre elles, tandis qu'au contraire tout couple de formes prises dans des groupes différents sont non équivalentes.

Si l'on établit les conditions pour que le point $a : b : c$ soit situé à l'intérieur du triangle $o1\infty$, on reconnaît que la forme

$$f = au^2 + 2buv + cv^2$$

est réduite, lorsque les inégalités suivantes

$$b > 0, \qquad a - b > 0, \qquad c - b > 0$$

sont satisfaites (¹).

Quant aux formes qui sont représentées par des

(¹) La définition de la *forme réduite*, à laquelle a conduit ce traitement, coïncide donc avec celle donnée par *Selling* (*Journal de Crelle*, t. 77) [Hurwitz]. Traduit dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (Liouville, Resal, Jordan), 3ᵉ série, t. III. L. L.

points sur les côtés du triangle $o1\infty$, celles-ci doivent dès lors être également comptées parmi les formes réduites. On démontre facilement que ces formes se distribuent en groupes six par six, de sorte que toute forme est équivalente aux formes d'un même groupe, mais non équivalente à aucune autre forme réduite.

3. Je terminerai ici la théorie de la réduction des formes quadratiques de déterminant négatif en démontrant que toute forme de déterminant négatif est équivalente à une forme réduite, ou, ce qui évidemment revient au même, que tout point quelconque P, pris à l'intérieur du cercle K, est situé sur un côté ou bien à l'intérieur d'un triangle élémentaire. Pour abréger le langage, je dirai ici d'un point P *qu'il est situé sur le côté pq d'un triangle pqr*, lorsque les points P et r sont situés de part et d'autre de pq. Soit alors s_0 ce côté du triangle $\Delta_0 = o1\infty$ sur lequel est situé P. On construira sur s_0 le triangle élémentaire Δ_1, différent de Δ_0. Maintenant, si P est situé en dehors du triangle Δ_1, soit s_1 ce côté de Δ_1 sur lequel est situé P. On construira alors sur s_1 le triangle élémentaire Δ_2 différent de Δ_1, ..., et ainsi de suite. Cette construction doit nécessairement prendre fin, c'est-à-dire que l'on doit nécessairement arriver finalement à un triangle élémentaire Δ_n, sur le contour ou à l'intérieur duquel est situé le point P. En effet, s'il en était autrement, aux extrémités des côtés $s_0, s_1, \ldots, s_n$ correspondrait une série illimitée de valeurs rationnelles $r_0, r'_0, r_1, r'_1, \ldots, r_n, r'_n$ (le côté s_n étant ainsi la ligne de jonction $r_n r'_n$).

Maintenant soit, par exemple, $r_n = \frac{\beta}{\alpha}$, $r'_n = \frac{\delta}{\gamma}$; on aurait $r'_n - r_n = \pm \frac{1}{\alpha\gamma}$ et cette différence, pour n croissant, décroîtrait sans limites, puisque les dénominateurs

des nombres $r_0, r'_0, r_1, r'_1, \ldots$ augmentent continuellement.

La longueur de la corde $s_n = r_n r'_n$, pour n croissant, décroîtrait par conséquent sans limites, ce qui est impossible, puisque le point P est toujours situé entre s_n et la circonférence de K, et à une distance finie de cette dernière.

4. J'ajouterai encore quelques observations aux considérations précédentes. Puisque chaque point situé sur le cercle K est situé à l'intérieur ou bien sur un côté d'un triangle élémentaire, et puisque aucun triangle élémentaire n'a de portion de surface en commun avec le triangle 01∞, et que, par suite, de même deux triangles élémentaires ne peuvent non plus avoir de portion de surface en commun, nous en concluons ceci :

Les triangles élémentaires remplissent exactement, par leur ensemble, tout l'intérieur du cercle K, *qu'ils recouvrent d'une manière simple, sans lacunes.*

Si l'on conçoit effectuée la construction de tous les triangles élémentaires, on s'imaginera la même figure que M. Klein a établie à l'occasion de la subdivision connue du plan des grandeurs complexes, basée sur la théorie des fonctions modulaires ([1]). Et réciproquement, des résultats que nous avons développés ci-dessus l'on peut déduire les propriétés essentielles de cette subdivision du plan des grandeurs complexes.

Quant à la réduction des formes de déterminant positif, elle peut, grâce à une idée due à M. Hermite,

([1]) Klein-Fricke, *Leçons sur la théorie des fonctions modulaires elliptiques*, t. I, p. 239-242; Teubner, 1890.

se ramener à celle des formes de déterminant négatif. On y arrive au moyen de cette définition :

« Une forme de déterminant positif est dite *réduite* lorsque la polaire du point correspondant à la forme traverse l'intérieur du triangle 01∞. »

En partant de cette définition l'on peut alors, sujet que je ne poursuivrai pas ici davantage, développer complètement la théorie des formes de déterminant positif (équation de Pell, etc.). On voit ici aussi ressortir comme principe de base l'importance des suites de Farey, dont la considération a été primitivement pour moi le point de départ de toute cette recherche.

[D3d]

NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE STOKES;

PAR M. R. BLONDLOT.

On donne communément le nom de *Théorème de Stokes* à la proposition qui exprime la transformation d'une intégrale prise le long d'un contour fermé sur une intégrale prise sur une surface limitée à ce contour. M. Ém. Picard fait toutefois remarquer avec raison que cette proposition était déjà connue d'Ampère, du moins dans des cas particuliers.

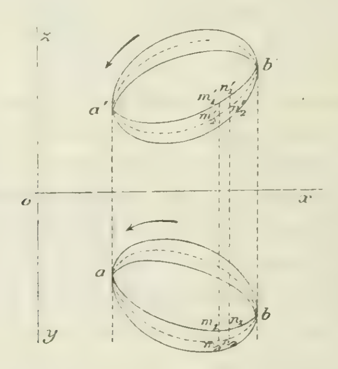
Il existe plusieurs démonstrations irréprochables de ce théorème; si je propose la suivante, c'est parce qu'elle me semble particulièrement simple et qu'on y voit l'intégrale superficielle naître, pour ainsi dire, de l'intégrale curviligne :

Étant donné un contour fermé quelconque C, qu'un mobile parcourt dans un sens choisi arbitrairement et

une surface quelconque S limitée à ce contour, nous appellerons *face positive de* S celle qui est telle qu'un personnage debout sur cette face, près du contour, voit le mobile qui parcourt C aller de sa droite vers sa gauche.

Soit P une fonction des coordonnées x, y, z supposées rectangulaires. Considérons l'intégrale $\int P\,dx$ prise dans le sens de la circulation du mobile, et étendue à tout le contour C. Nous nous proposons de transformer cette intégrale curviligne en une intégrale superficielle prise sur S.

Figurons les projections de C d'après les conventions de la Géométrie descriptive, en prenant le plan XOZ pour plan vertical, le plan XOY pour plan horizontal supposé rabattu sur le plan vertical.



Soit A le point de C le plus rapproché, et B le point de C le plus éloigné du plan YOZ. Par ces deux points, traçons sur S une ligne simple quelconque, puis imaginons que cette ligne se dédouble, de façon à former un contour fermé limité aux points A et B et toujours situé sur la surface S et que ce contour fermé s'ouvre progressivement de façon à venir finalement coïncider avec C.

Soient maintenant C_1 et C_2 deux états infiniment voisins du contour variable ; nous allons évaluer la variation éprouvée par P lorsque le contour variable éprouve cette transformation infiniment petite. Pour cela, menons, parallèlement à YOZ, une série de plans infiniment rapprochés ; à chaque élément M_1N_1 ainsi découpé sur C_1 correspond un élément M_2N_2 découpé sur C_2 et ayant la même projection dx. Lorsqu'on passe de C_1 à c_2, un élément $P\,dx$ d'intégrale se transforme en un autre où dx est le même et où P seul a varié, à cause de la variation de l'y et de l'x du milieu de l'élément de contour ; en appelant δy et δz ces variations, celle de P est

$$\frac{\partial P}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial P}{\partial z}\,\delta z,$$

et celle de $\int P\,dx$ est

$$\int_{c_1} \frac{\partial P}{\partial y}\,\delta y\,dx + \frac{\partial P}{\partial z}\,\delta z\,dx.$$

Mais $\delta y\,dx$ est la projection sur le plan xoy du quadrilatère infiniment petit $M_1M_2N_2N_1$; désignons cette projection par ω_z. De même, $\delta z\,dx$ est la projection prise en signe contraire du même quadrilatère sur le plan xoz ; désignons-la par ω_y. La variation précédente peut alors s'écrire

$$\int \frac{\partial P}{\partial y}\,\omega_z - \frac{\partial P}{\partial z}\,\omega_y ;$$

elle est ainsi exprimée par une intégrale de surface s'étendant à tous les éléments de la bande infiniment étroite balayée par le contour variable.

Lorsque, maintenant, ce contour variable passera d'un état initial dans lequel il embrasse sur S une aire nulle à un état final dans lequel il coïncide avec C, la somme des variations éprouvées par $\int P\,dx$ sera préci-

sément la valeur de $\int_C P\,dx$, puisque, dans l'état initial considéré, l'intégrale est identiquement nulle. On a donc

$$\int_C P\,dx = \int_S \frac{\partial P}{\partial y}\omega_z - \frac{\partial P}{\partial z}\omega_y,$$

l'intégrale du second membre s'étendant à tous les éléments de toutes les bandes successivement balayées, c'est-à-dire à tous les éléments de S.

Remarquons que, cette dernière intégrale étant indépendante du mode de division de S en éléments infiniment petits, il s'ensuit que ω_y et ω_z peuvent être envisagées comme les projections d'un élément de surface de forme quelconque pris sur S.

Si l'on désigne par P, Q, R trois fonctions quelconques de xyz, on a, d'après ce qui précède,

$$\int_C P\,dx = \int_S \frac{\partial P}{\partial y}\omega_z - \frac{\partial P}{\partial z}\omega_y,$$

$$\int_C Q\,dy = \int_S \frac{\partial Q}{\partial z}\omega_x - \frac{\partial Q}{\partial x}\omega_z,$$

$$\int_C R\,dz = \int_S \frac{\partial R}{\partial x}\omega_y - \frac{\partial R}{\partial y}\omega_x.$$

En ajoutant membre à membre, il vient

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)\omega_x + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\omega_y + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\omega_z;$$

c'est le théorème de Stokes; ω_x, ω_y, ω_z sont définis comme les produits de l'élément ω pris sur la surface S par les cosinus des angles formés par les sens positifs des trois axes avec la normale à S menée du côté de la face positive, définie par le sens de l'intégration le long du contour.

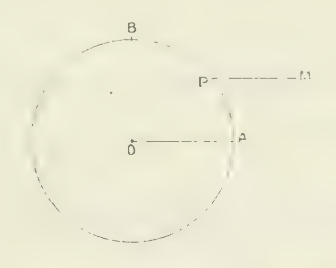
CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1897. — COMPOSITIONS.

Caen.

CERTIFICAT D'ÉTUDES N° 1. — ÉLÉMENTS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES.

I. *Un point* P, *partant d'une position donnée* A, *parcourt, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, une circonférence donnée, de centre* O : *par une quelconque de ses positions, on mène un seg-*



ment PM, *ayant même direction et même sens que le rayon* OA, *et même longueur que l'arc de cercle* AP :

1° *Déterminer la trajectoire décrite par le point* M *quand le point* P *parcourt la circonférence;*

2° *Calculer la longueur de cette trajectoire;*

3° *Évaluer l'aire balayée par le segment* PM *quand* P *parcourt le quadrant* AB;

4° *Calculer l'aire balayée dans le même temps par le rayon vecteur* OM.

II. *Un point pesant, de masse m, est abandonné sans vitesse à l'action de son poids : il tombe dans un milieu qui oppose une résistance dirigée en sens contraire de la vitesse et égale au produit de cette vitesse par* $\frac{2mt}{1+t^2}$, *t désignant le temps écoulé depuis qu'on a laissé tomber le mobile. Déterminer la loi du mouvement. Construire et étudier la courbe propre à représenter la loi des vitesses en fonction du temps.*

SOLUTIONS.

I. 1° Les coordonnées de M sont de la forme

$$x = R(\theta + \cos\theta), \qquad y = R\sin\theta :$$

le lieu est une portion de cycloïde ayant son rebroussement sur la tangente au cercle en B ;

2° $$S = R\int_0^{2\pi}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta = 8R ;$$

3°, 4° Les deux aires sont égales à $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)R^2$.

II. Équation du mouvement : $\frac{dv}{dt}+\frac{2vt}{1+t^2}=g$:

$$v = \frac{1}{3}g\frac{3t+t^3}{1+t^2} = \frac{1}{3}g\left(t+\frac{2t}{1+t^2}\right);$$

$$s = \frac{1}{6}gt^2+\frac{1}{3}g\log(1+t^2).$$

CERTIFICAT N° 2. — CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

I. *Intégrer le système des équations simultanées*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = v + 2\dfrac{\partial u}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = u - 2\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ v^2 - 4u^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

où u, v désignent deux fonctions inconnues des variables indépendantes x et y.

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ, *on considère les surfaces engendrées par une parabole mobile de grandeur variable, dont le plan reste parallèle à* XOZ, *l'axe parallèle à* OZ, *et le sommet situé dans* YOZ : *on propose de rechercher quelles sont, parmi ces surfaces, celles où les sections par des plans parallèles à* XOY *constituent une première série de lignes asymptotiques.*

SOLUTIONS.

I. De l'équation finie on tire v en fonction de u : substituant dans les deux premières, on a deux équations d'où l'on tire $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, et, par suite,

$$du = -\frac{2\,dx + 3\,dy}{4}\sqrt{1 + 4u^2}:$$

intégrant, et substituant dans v, on trouve

$$4u = \mathrm{C}e^{-\frac{2x+3y}{2}} - \frac{1}{\mathrm{C}}e^{\frac{2x+3y}{2}}; \qquad 2v = \mathrm{C}e^{-\frac{2x+3y}{2}} + \frac{1}{\mathrm{C}}e^{\frac{2x+3y}{2}}.$$

II. L'équation générale des surfaces S est de la forme

$$(1) \qquad z = x^2 f(y) + \varphi(y):$$

la condition imposée à la surface cherchée donne

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0.$$

Remplaçons les dérivées partielles p, q, r, s, t par leurs valeurs tirées de (1) :

$$[2f(y)f''(y) - 3f'^2(y)]x^4 + 2[f(y)\varphi''(y) - f'(y)\varphi'(y)]x^2 + \varphi'^2(y) = 0.$$

Cette équation doit avoir lieu identiquement : on en

conclut

$$\varphi(y) = C, \qquad f(y) = \frac{a}{(y+b)^2}, \qquad z = \frac{ax^2}{(y+b)^2} + C;$$

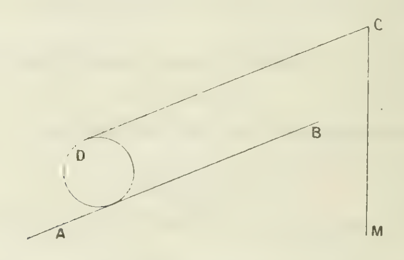
la surface cherchée est un conoïde.

Certificat d'études n° 3. — Mécanique.

I. *Démontrer le théorème général d'Ivory sur les attractions de deux ellipsoïdes homofocaux.*

II. *On donne une sphère pleine d'une substance homogène, dont chaque elément possède un pouvoir attractif proportionnel à sa masse et à l'inverse du cube de sa distance au point attiré. Déterminer l'attraction de la sphère sur un point intérieur et en déduire, par le théorème d'Ivory, l'attraction sur un point extérieur.*

III. *Un disque homogène* D, *infiniment mince, de poids* P, *a la forme d'un cercle de rayon* R; *il s'appuie sur une droite* AB, *inclinée de* 30° *sur l'horizon, et son*



plan doit coïncider avec le plan vertical V *conduit par* AB. *Un fil très mince, inextensible et de masse négligeable, a une de ses extrémités fixée en un point de la circonférence de* D : *il s'enroule autour du disque, s'en détache en suivant une direction parallèle à* AB, *passe dans un petit anneau* C, *fixé dans le plan* V *à une distance* 2R *de la droite* AB, *puis se termine par*

une portion verticale CM *qui supporte à son extrémité un poids* P. *Le système, d'abord maintenu en repos, est abandonné à l'action de la pesanteur : déterminer le mouvement qu'il va prendre, en supposant qu'aucune force de frottement n'entre en jeu.*

SOLUTIONS.

II. Point intérieur de coordonnées x, o, o :

$$X = 2\pi\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta \log \frac{\sqrt{R^2 - x^2 \sin^2\theta} + x\cos\theta}{\sqrt{R^2 - x^2 \sin^2\theta} - x\cos\theta}\, d\theta.$$

$$= \pi\mu \frac{R}{x} - \pi\mu \frac{R^2 + x^2}{2x^2} \log \frac{R - x}{R + x}.$$

Pour le point extérieur, on imagine une sphère de rayon x exerçant sur un point (R, o, o) une attraction X se déduisant de la précédente par la permutation de x et R : on en conclut, par la règle d'Ivory,

$$X = \frac{R^2}{x^2} X' = \pi\mu \frac{R}{x} - \pi\mu \frac{R^2 + x^2}{2x^2} \log \frac{x - R}{x + R}.$$

III. Soient x la quantité dont s'est déplacé le centre du disque dans la direction AB, θ l'angle dont D a tourné, z la quantité dont M a descendu au temps t : la Cinématique donne

$$(1) \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + R \frac{d\theta}{dt}.$$

Soit T la tension du fil : on aura

$$\frac{P}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = T - \frac{1}{2} P, \qquad \frac{P}{2g} R \frac{d^2\theta}{dt^2} = T, \qquad \frac{P}{g} \frac{d^2z}{dt^2} = P - T.$$

Ces équations, combinées avec (1) donnent

$$T = \frac{3}{8} P, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{8} g, \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{3}{4} \frac{g}{R}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{5}{8} g.$$

Épreuve pratique. — *Sur la courbe définie par l'équation*

$$r = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta},$$

on considère l'arc AO *correspondant aux valeurs de* θ *comprises entre zéro et* $\frac{\pi}{4}$. *Calculer la distance du pôle au centre de gravité du solide homogène compris à l'intérieur de la surface engendrée par la révolution de l'arc* AO *autour de l'axe polaire.*

Réponse :

$$\xi = \frac{17 - 24\log 2}{24\log 2 - 16} = 0,574.$$

Dijon.

Certificat de Calcul différentiel et intégral.

I. *Réduction des intégrales de la forme* $\int F(x, y)\,dx$, *où* F *est une fonction rationnelle, où* y *représente la racine carrée d'un polynome entier en* x.

II. *Trouver la ligne qu'enveloppe la droite représentée par les deux équations*

$$(1)\qquad \begin{cases} x + az + ab = 0, \\ y - bz + ab = 0, \end{cases}$$

quand on y réduit les deux paramètres a, b *à un seul par la substitution à* b *d'une fonction de* a *convenablement choisie.*

Trouver la surface enveloppée par la même droite (1) *quand on y laisse au contraire les paramètres* a, b *tout à fait indépendants l'un de l'autre.*

IDÉE DE LA SOLUTION DU PROBLÈME.

Pour l'existence d'une ligne enveloppe il faut que les équations (1) et celles-ci

$$(2)\quad \begin{cases} z + b - a\dfrac{db}{da} = 0, \\ z\dfrac{db}{da} + b + a\dfrac{db}{da} = 0, \end{cases}$$

provenant de leur différentiation par rapport à a puissent être résolues par rapport à x, y, z, ce qui conduit d'abord à la condition

$$\begin{vmatrix} 1 & b + a\dfrac{db}{da} \\ \dfrac{db}{da} & b + a\dfrac{db}{da} \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{db}{da}\right)\left(b - a\frac{db}{da}\right) = 0,$$

se décomposant en

$$\frac{db}{da} - 1 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad b = a + C,$$

$$b + a\frac{db}{da} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad ab = C.$$

La deuxième alternative conduit à

$$(3)\qquad x = -C, \qquad y = -C, \qquad z = 0,$$

formules représentant une infinité de points ayant pour lieu la bissectrice de l'angle formé par la direction de même nom des axes des x et des y (cas de dégénérescence de l'enveloppe).

La première conduit à

$$x = a^2, \qquad y = (a + C)^2, \qquad z = -2a - C$$

ou bien, par l'élimination de a, à

$$(4) \qquad x + y - Cz = \left(\frac{z - C}{2}\right)^2,$$

équations représentant une famille de coniques, au paramètre indéterminé C, dont les plans passent tous par la droite lieu des points (3).

Pour l'existence d'une surface-enveloppe, dans le cas où les paramètres a, b sont laissés indépendants, il faut que les équations (1) et celle-ci

$$\begin{vmatrix} z + b & a \\ b & z + a \end{vmatrix} = z(z + a + b) = 0,$$

obtenue en égalant à 0 le déterminant différentiel de leurs premiers membres pris par rapport au couple (a, b), puissent être résolues par rapport à x, y, z. La décomposition de cette dernière équation conduit soit à

$$x = -ab, \qquad y = -ab, \qquad z = 0,$$

formules représentant la droite lieu des points (3) (cas de dégénérescence de la surface-enveloppe), soit à

$$x = a^2, \qquad y = b^2, \qquad z = -(a + b),$$

représentant une surface véritable, pour l'équation ordinaire de laquelle l'élimination de a, b entre ces trois dernières formules conduit à

$$z^4 - 2(x + y)z^2 + (y - x)^2 = 0.$$

Cette surface est précisément celle qu'engendre la ligne (4) quand on y fait varier indéfiniment le paramètre C.

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE.

PROBLÈME. — *Mouvement relatif dans un plan d'un point pesant assujetti à y rester, le plan étant animé d'un mouvement hélicoïdal uniforme autour d'un axe vertical.*

Grenoble.

CERTIFICAT D'ASTRONOMIE.

COMPOSITION. — 1° *Développer suivant les puissances de l'excentricité, et en fonction des multiples de l'anomalie moyenne : l'anomalie excentrique, le rayon vecteur, l'anomalie vraie et la longitude du Soleil. Équation du centre. On négligera* e^4.

2° *Coordonnées équatoriales du Soleil. Équation du temps : elle s'annule quatre fois par an.*

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

COMPOSITION. — *On considère une sphère de rayon constant* R *dont le centre* μ *décrit une hélice* Σ *tracée sur un cylindre circulaire de rayon* r.

On demande de déterminer l'arête de rebroussement de la surface enveloppe de cette sphère. On montrera qu'elle se compose de deux courbes distinctes S, S' *jouissant des propriétés suivantes :*

1° *La sphère mobile a constamment un contact du second ordre avec les courbes* S, S';

2° *Les tangentes aux courbes* S, S' *aux points* M, M' *qui correspondent à un point* μ *de* Σ *sont perpendiculaires à la tangente en* μ *à* Σ, *et, respectivement aussi, aux droites* $M\mu$, $M'\mu$;

3° *La sphère de rayon* R *dont le centre décrit l'une ou l'autre des courbes* S, S' *a un contact du second ordre avec la courbe* Σ.

Cas particulier où le rayon R *de la sphère mobile est celui de la sphère osculatrice à l'hélice.*

SOLUTION.

L'hélice étant définie par

$$(1)\qquad \xi = r\cos v,\qquad \eta = r\sin v,\qquad \zeta = krv,$$

l'arête de rebroussement de la sphère sera donnée par

$$(2)\qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = R^2,$$

$$(3)\qquad (x-\xi)\,d\xi + (y-\eta)\,d\eta + (z-\zeta)\,d\zeta = 0,$$

$$(4)\qquad (x-\xi)\,d^2\xi + (y-\eta)\,d^2\eta + (z-\zeta)\,d^2\zeta = d\sigma^2;$$

et posant

$$R_1 = \pm\sqrt{\frac{R^2 - r^2(1+k^2)^2}{1+k^2}},$$

on en tire

$$(5)\qquad \begin{cases} x = kR_1\sin v - k^2 r\cos v,\\ y = -kR_1\cos v - k^2 r\sin v,\\ z = R_1 + krv,\end{cases}$$

équations qui, par une rotation des axes autour de Oz, se ramènent à la forme (1). L'arête de rebroussement se compose donc de deux hélices circulaires S, S'.

On voit immédiatement que, dans le cas particulier où R est le rayon de la sphère osculatrice à Σ, soit

$$R = r(1+k^2),\qquad R_1 = 0,$$

et les deux courbes S, S' se confondent avec le lieu du centre de courbure de l'hélice Σ.

Les points M, M' répondant sur S et S' à un point μ

de Σ sont, d'après (3), (4), sur la droite polaire de μ : ces deux points sont donc sur la droite polaire, à des distances égales du centre de courbure.

Les propriétés énoncées concernant les courbes S, S′ se vérifient immédiatement à l'aide de (1) et de (5). Elles sont d'ailleurs générales et subsistent quelle que soit la courbe Σ.

Ainsi, les équations (2), (3), (4) expriment que la sphère de centre $M(x, y, z)$ a un contact du second ordre avec la courbe Σ au point $\mu(\xi, \eta, \zeta)$.

En différentiant complètement (3) et tenant compte de (4), on a

$$(6) \qquad dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta = 0,$$

d'où résulte la perpendicularité des tangentes en μ et en M ou M′.

De même, différentiant (2), et tenant compte de (3), on a

$$(7) \qquad (x-\xi)\,dx + (y-\eta)\,dy + (z-\zeta)\,dz = 0,$$

d'où résulte la perpendicularité de $M\mu$ et des tangentes en M ou M′.

Ces deux théorèmes s'établissent d'ailleurs géométriquement en remarquant que les courbes S, S′ sont décrites sur la surface polaire de Σ, et que la distance μM est invariable.

Enfin, l'ordre de contact de la sphère mobile et de l'arête de rebroussement résulte d'un théorème général.

Dans le cas actuel, si l'on différentie (7) en tenant compte de (6), on a

$$(x-\xi)\,d^2x + (y-\eta)\,d^2y + (z-\zeta)\,d^2z + ds^2 = 0,$$

équation qui, jointe à (7) et à (2), exprime précisément

que la sphère a un contact du second ordre avec l'arête de rebroussement de sa surface enveloppe.

Épreuve pratique. — 1° *Calculer* $\int \frac{dx}{1+x^4}$; 2° *en déduire* $\int_{-\infty}^{-\infty} \frac{dx}{1-x^4}$; 3° *calculer cette intégrale définie par la méthode de Cauchy.*

Certificat de Mécanique.

Un tore homogène a son centre O *fixe. Son axe, qui lui est invariablement lié, est un tube à section infiniment petite, dont on néglige la masse, et dans lequel peut glisser sans frottement un point matériel pesant* M. *Le tube est assujetti à glisser sans frottement entre deux cercles horizontaux fixes infiniment voisins dont le centre commun est sur la verticale du point de suspension du tore, au-dessus de ce point. On demande le mouvement du système, et plus particulièrement le mouvement relatif du point* M *dans le tube.*

Données. — *On désignera par* A *et* C *les moments d'inertie du tore par rapport à un diamètre de son équateur et par rapport à son axe et par* m *la masse du point* M. *On supposera, au début, le point placé dans le tube, sans vitesse relative, à une distance* r_0 *du point* O *telle que l'on ait*

$$mr_0^2 = A,$$

le tore ayant un mouvement initial quelconque compatible avec les liaisons.

Esquisse d'une solution de l'épreuve écrite de Mécanique.

On prendra pour origine le point O, pour axe fixe des r la verticale Or, en sens inverse de la pesanteur,

pour axe mobile Or la direction de l'axe du tube qui fait un angle aigu avec Or. En appelant p, q, r les composantes de la rotation du tore par rapport aux axes mobiles, θ, φ et ψ les angles d'Euler, φ' et ψ' les dérivées de φ et ψ par rapport au temps (θ est constant et aigu), r la coordonnée de M, r' sa dérivée, l'extrémité C du vecteur qui représente le moment résultant des quantités de mouvement de tout le système par rapport à O aura pour coordonnées par rapport aux axes mobiles

$$(A + mr^2)p, \quad (A + mr^2)q, \quad Cr,$$

et l'on a

$$p = \sin\varphi \sin\theta\psi', \qquad q = \cos\varphi \sin\theta\psi', \qquad r = \varphi' + \cos\theta\psi'.$$

Toutes les forces, la réaction du cercle comprise, ont des moments nuls par rapport à Or et Or_1 ; on aura donc deux intégrales premières en écrivant que la vitesse absolue de C est perpendiculaire à Or et à Or_1.

On trouve ainsi

$$(1) \qquad r = r_0,$$

$$(2) \qquad (A + mr^2)\sin^2\theta\psi' = k,$$

r_0 et k étant des constantes. On pourrait trouver ces deux intégrales en écrivant les équations analogues aux équations d'Euler ; la troisième fournirait l'intégrale (1); l'élimination de la réaction du cercle sur le tube entre les deux premières donnerait (2).

L'équation des forces vives fournit une troisième intégrale que l'on pourrait du reste déduire de l'équation du mouvement relatif de M, la loi de rotation du tube en fonction de r étant connue.

L'intégrale des forces vives peut s'écrire

$$(A + mr^2)(p^2 + q^2) + mr'^2 = -2mgr\cos\theta + h,$$

h étant une troisième constante. Cette équation se ra-

mène à la suivante :

$$(3) \qquad mr'^2 = \frac{(-2mgr\cos\theta + h)(A + mr^2) - k^2\sin^2\theta}{A + mr^2}.$$

On a une quadrature hyperelliptique en général, mais la discussion du mouvement dépend seulement d'un polynome du troisième degré

$$f(r) = (-2mgr\cos\theta + h)(A + mr^2) - k^2\sin^2\theta.$$

(1) et (2) donneront du reste φ et ψ par de nouvelles quadratures.

Dans le cas particulier indiqué, si l'on appelle ω la valeur initiale de ψ', on peut écrire

$$f(r) = 2m(r_0 - r)A\varphi(r),$$

avec

$$\varphi(r) = g\cos\theta\left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right) - \omega^2\sin^2\theta(r + r_0).$$

Si $r_0 > 0$ et

$$g\cos\theta - \omega^2\sin^2\theta\, r_0 < 0,$$

r variera entre r_0 et $r_1 > r_0$.

Si $r_0 > 0$,

$$g\cos\theta - \omega^2\sin^2\theta\, r_0 > 0:$$

deux cas peuvent se présenter : Si $\varphi(r)$ a ses racines réelles, elles sont comprises entre 0 et r_0, et r variera entre r_0 et la plus grande des deux. Si les racines sont imaginaires, r variera indéfiniment à partir de r_0, autant du moins que le lui permettra la longueur du tube.

Si $r_0 > 0$,

$$g\cos\theta - \omega^2\sin^2\theta\, r_0 = 0.$$

M_0 est une position d'équilibre relatif, r, φ' et ψ' sont constants.

Si $r_0 < 0$, le point descend à partir de M_0 tant que

le lui permet la longueur du tube. Du reste, si le point quitte le tube, il décrira une parabole déterminée par sa vitesse au moment de la sortie et le tore tournera de façon que φ' et ψ' demeurent constants.

Dans le cas général, il est facile de montrer que les données initiales peuvent être choisies de façon que $f(r)$ aient trois racines données r_1, r_2, r_3, sous les conditions et restrictions suivantes :

On devra d'abord avoir

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{A}{m}.$$

Si elles sont toutes les trois réelles, une seule peut être négative et elle doit être inférieure en valeur absolue aux deux autres. Deux peuvent devenir égales à condition d'être plus grandes que o et supérieures en valeur absolue à la troisième si elle est négative. Enfin elles peuvent devenir égales toutes les trois à condition d'être positives.

Si une seule racine est réelle, elle peut être positive ou négative, mais la partie réelle des racines imaginaires doit être plus grande que o. La discussion du mouvement se ferait du reste bien simplement dans chaque cas.

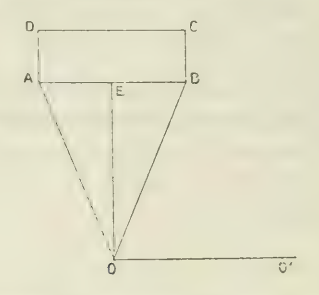
Enfin, on peut remarquer qu'il eût été commode de se servir des équations de Lagrange relatives aux variables φ et ψ et de l'équation des forces vives.

Épreuve pratique de Mécanique.

Une roue en fer homogène a pour méridien un triangle isoscèle OAB *surmonté d'un rectangle* ABCD, *et la hauteur* OE *du triangle* OAB *est perpendiculaire à l'axe* OO' *de la roue. On a*

$$OE = 1^m, \qquad AB = 0^m,50, \qquad AD = 0^m,20.$$

Le poids spécifique du fer dont est faite la roue est 7,7. On prendra de plus $g = 9^m,8$ *et* $\pi = 3,1416$.



1° *On demande le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe.*

2° *L'axe de la roue étant horizontal et fixe, un cordon qui s'enroule sur la roue porte à son extrémité un poids de* 50^{kg}. *Le cordon est vertical et la roue est animée à un instant donné d'une vitesse de trente tours à la minute qui tend à soulever le poids. On demande à quelle hauteur il s'élèvera si l'on abandonne le système à lui-même. On néglige les résistances passives et le poids du cordon que l'on suppose tendu à l'instant considéré.*

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES. CONCOURS DE 1895 (1).

Mathématiques élémentaires.

On donne un triangle T et l'on considère le triangle T' qui a pour sommets les projections orthogonales d'un point M sur les côté du triangle T.

---

(1) Les *Nouvelles Annales de Mathématiques* n'ont pas publié les sujets du concours d'Agrégation en 1895. Nous croyons répondre au désir d'un grand nombre de nos lecteurs en comblant cette lacune.

(LES RÉDACTEURS.)

1° Démontrer que, si le point M décrit une droite Δ dans le plan du triangle T, les côtés du triangle T′ enveloppent trois paraboles P, P_1, P_2.

Ces paraboles sont inscrites dans le même angle; on construira leurs foyers et leurs directrices.

Quelle position doit occuper la droite Δ pour que ces trois paraboles soient tangentes en un même point?

2° Comment faut-il choisir la droite Δ pour que les directrices des trois paraboles P, P_1, P_2 concourent en un même point H à distance finie?

La droite Δ se déplaçant de manière à satisfaire à cette condition, trouver le lieu du point H.

3° Démontrer que, si l'on fait tourner la droite Δ autour d'un point fixe K, la directrice de la parabole P passe elle-même par un point fixe I.

Trouver l'enveloppe de la droite KI lorsque l'un des points K ou I décrit une droite donnée.

4° A un point K correspondent trois points : I, I_1, I_2, relatifs aux directrices des paraboles P, P_1, P_2.

On demande quelle position doit occuper le point K pour que les trois points I, I_1, I_2 soient en ligne droite, et l'on propose de démontrer que, si le point K se déplace de manière à satisfaire à cette condition, la droite I, I_1, I_2 tourne autour d'un point fixe.

Mathématiques spéciales.

On donne un ellipsoïde E qui, rapporté à ses plans principaux, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

et une sphère de rayon r et de centre $A(x_0, y_0, z_0)$.

On considère les quadriques S qui sont tangentes à tous les plans tangents communs à la sphère et à l'ellipsoïde E; du point A l'on abaisse une normale AP sur l'une des quadriques S, et au pied P de cette normale on mène le plan tangent Π à cette quadrique.

1° Prouver que le plan Π est le plan polaire du point A par rapport à une surface H, homofocale à l'ellipsoïde E, repré-

sentée par l'équation

$$H_\rho = \frac{x^2}{a^2-\rho} + \frac{y^2}{b^2-\rho} + \frac{z^2}{c^2-\rho} - 1 = 0.$$

2° Prouver que le plan Π est le plan polaire du point A par rapport à l'une des quadriques S; prouver qu'il est aussi un plan principal pour une autre de ces quadriques.

Les réciproques de ces propositions sont-elles vraies?

3° Par tout point M de l'espace il passe trois plans Π polaires du point A par rapport à trois quadriques H_λ, H_μ, H_ν du système homofocal. Exprimer les coordonnées du point M en fonction des paramètres λ, μ, ν.

Déduire des expressions ainsi obtenues le lieu des points M pour lesquels les trois plans Π sont rectangulaires.

4° Trouver ce que deviennent les expressions des coordonnées du point M, soit quand ce point est sur la développable enveloppée par le plan Π, soit quant il se trouve sur l'arête de rebroussement de cette développable. En conclure le degré de la développable et la nature de son arête de rebroussement.

5° Tout plan Π coupe la développable suivant la génératrice de contact et suivant une conique. De quelle espèce est cette conique? En connaît-on des tangentes remarquables?

6° Trouver le lieu des foyers de ces diverses coniques.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On considère la courbe C représentée par l'équation

$$(x^2+y^2)(x^2+2axy+y^2)-xy=0,$$

où a désigne un paramètre arbitraire.

Le paramètre a ayant une valeur quelconque :

1° Déterminer le genre de la courbe C.

2° Former les intégrales abéliennes de première espèce relatives à cette courbe.

3° Former une intégrale de troisième espèce devenant infinie au point double de la courbe C.

4° Écrire à l'aide de ces intégrales, par l'application du théorème d'Abel, les conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points de la courbe C soient en ligne droite, ainsi que

les conditions nécessaires et suffisantes pour que huit points de cette courbe soient sur la même conique.

Examiner le cas particulier où la droite et la conique passent sur le point double de la courbe C.

5° Trouver combien il y a de systèmes de coniques touchant la courbe C en quatre points M_1, M_2, M_3, M_4.

6° Déterminer les valeurs du paramètre A pour lesquelles le genre de la courbe C s'abaisse.

On étudiera en particulier l'hypothèse $a = 0$ et l'on résoudra les problèmes suivants pour la courbe particulière D qui correspond à cette hypothèse :

I. Que deviennent, pour la courbe D, les intégrales de première espèce relatives à la courbe générale C?

II. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points de la courbe D soient en ligne droite et les conditions nécessaires et suffisantes pour que huit points de cette courbe soient sur une conique.

III. Trouver combien il y a de systèmes de coniques touchant la courbe D en quatre points M_1, M_2, M_3, M_4.

IV. Déterminer les points d'inflexion et les tangentes doubles de la courbe D.

Composition de Mécanique rationnelle.

On considère un corps solide S pesant, ayant la forme d'un cône droit dont le rayon de base est R. Le centre de gravité de ce corps est situé en un point O de l'axe de révolution du cône, à une distance R de sa base.

L'ellipsoïde d'inertie du corps S relatif au centre de gravité O est une sphère.

Le cône S est mobile autour de son centre de gravité O, supposé fixe, et la circonférence de sa base est tangente à un plan horizontal fixe Π situé au-dessous du point O à une distance R de ce point.

Étudier le mouvement du corps S en supposant que la circonférence de base du cône glisse avec frottement sur le plan Π.

Calculer la réaction du plan Π et celle du point fixe O.

Conditions initiales. — Soient OO la perpendiculaire

abaissée du point O sur le plan Π et OC la position initiale de la perpendiculaire abaissée du point O sur la base du cône :

A l'époque $t = 0$, l'axe instantané de rotation est situé dans l'angle COO' et le sens de la rotation initiale est choisi de telle sorte que le corps S appuie sur le plan Π.

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1895.
SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR UN CORRESPONDANT [1].

Première et deuxième Partie. — Je rappelle la proposition bien connue suivante :

Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport à toutes les quadriques d'un faisceau tangentiel est une droite; chaque point de cette droite est le pôle du plan par rapport à une surface déterminée du faisceau. En particulier, le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport aux quadriques homofocales est une droite perpendiculaire à ce plan.

Cela posé, je considère le faisceau tangentiel des quadriques S inscrites dans la développable circonscrite à un ellipsoïde E et à une sphère Σ de centre A; je dis que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un plan Π satisfasse à la condition indiquée dans l'énoncé, d'être tangent à une quadrique S, au pied P d'une normale issue de A, est que ce plan soit perpendiculaire à la droite joignant le point A à son pôle p par rapport à l'ellipsoïde E.

---

(1) *Voir* l'énoncé, ci-dessus, p. 281.

La condition est nécessaire, car si j'appelle q le pôle du plan Π par rapport à la sphère, ce point est sur la perpendiculaire abaissée du centre A sur le plan; cette perpendiculaire, contenant les pôles P et q de Π par rapport à S et Σ, passera par le pôle p du même plan Π par rapport à l'ellipsoïde E, et Ap sera bien perpendiculaire à Π.

La condition est suffisante, car si la droite Ap est perpendiculaire à Π, elle passe par le pôle q de ce plan par rapport à Σ; comme elle passe par p et q, elle est le lieu des pôles du même plan par rapport à toutes les quadriques S; le point P, commun à la droite et au plan, est alors le point de contact de celle des quadriques S qui est tangente au plan, et la normale à cette surface passe bien par le point A.

Les plans Π qui satisfont à la condition précédente constituent un ensemble bien connu de plans; les points p sont les points de la cubique des pieds des normales abaissées de A sur l'ellipsoïde E, et les plans Π sont les plans de la développable de troisième classe, polaire réciproque de cette cubique par rapport à cet ellipsoïde; cette développable est inscrite dans le tétraèdre formé par les plans de coordonnées et le plan de l'infini. La cubique et la développable précédentes jouent dans l'espace le même rôle que l'hyperbole d'Apollonius et la parabole de Chasles dans la théorie des coniques.

Étant donné un plan Π, le lieu de ses pôles par rapport aux quadriques S est la droite Ap; c'est aussi le lieu des pôles du même plan par rapport aux quadriques H, homofocales à l'ellipsoïde, d'après la propriété de Ap de passer par p et d'être normale au plan Π. Le point A de cette droite est alors, comme on le sait, le pôle de Π par rapport à une quadrique S et aussi par rapport à une quadrique H; les réciproques sont exactes.

Si A est, en effet, le pôle de Π par rapport à une quadrique S, Aq est le lieu des pôles de Π par rapport à ces quadriques, et elle est perpendiculaire à ce plan Π, qui satisfait dès lors aux conditions de l'énoncé; si, d'autre part, A est le pôle de Π par rapport à une quadrique H, le lieu des pôles de Π par rapport aux homofocales H est la perpendiculaire abaissée de A sur le plan Π, et cette droite contient le pôle p par rapport à l'ellipsoïde E; Ap est donc encore perpendiculaire au plan Π. On voit ainsi que la développable constituée par les plans Π est identique à la développable formée par les plans polaires de A par rapport aux quadriques H homofocales à E.

En considérant maintenant le point à l'infini sur la droite Apq normale au plan Π, ce point est le pôle du plan Π par rapport à une quadrique S; cette quadrique admet alors le plan Π comme plan principal. Réciproquement, si un plan Π est plan principal d'une quadrique du faisceau S, le lieu de ses pôles par rapport à toutes les quadriques de ce faisceau est la normale au plan menée par le point q, qui est son pôle par rapport à la sphère Σ, et cette normale passe par A; dès lors le plan Π satisfait aux conditions de l'énoncé.

Troisième et quatrième Partie. — Par un point M de l'espace passent trois plans de la développable; chacun d'eux est le plan polaire de A par rapport à une seule surface H; on peut donc considérer comme coordonnées particulières de M les paramètres déterminant les trois quadriques homofocales correspondant aux trois plans issus de ce point.

Pour exprimer les coordonnées x, y, z du point M au moyen des trois paramètres λ, μ, ν des quadriques précédentes, nous considérerons le plan polaire du

point A (x_0, y_0, z_0) par rapport à la surface

$$\mathrm{H}_\rho = \frac{x^2}{a^2-\rho} + \frac{y^2}{b^2-\rho} + \frac{z^2}{c^2-\rho} - 1 = 0,$$

homofocale à l'ellipsoïde; les coordonnées de ce plan sont

$$(1) \qquad u = \frac{-x_0}{a^2-\rho}, \qquad v = \frac{-y_0}{b^2-\rho}, \qquad w = \frac{-z_0}{c^2-\rho};$$

ces équations définissent, lorsque ρ varie, les plans successifs de la développable.

En écrivant qu'un de ces plans passe par le point (x, y, z) on a une équation en ρ qui est du troisième degré; en désignant par λ, μ, ν ses trois racines, on a identiquement

$$\frac{xx_0}{a^2-\rho} + \frac{yy_0}{b^2-\rho} + \frac{zz_0}{c^2-\rho} - 1 = \frac{(\rho-\lambda)(\rho-\mu)(\rho-\nu)}{(a^2-\rho)(b^2-\rho)(c^2-\rho)},$$

et la méthode classique de décomposition du second membre en fractions simples donne les valeurs suivantes pour x, y, z :

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{x_0(b^2-a^2)(c^2-a^2)}, \\[2ex] y = \dfrac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{y_0(a^2-b^2)(c^2-b^2)}, \\[2ex] z = \dfrac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(c^2-\nu)}{z_0(a^2-c^2)(b^2-c^2)}. \end{cases}$$

Si l'on suppose dans ces formules que les deux nombres μ et ν deviennent égaux, et si l'on y regarde λ et μ comme paramètres variables, elles définissent la surface développable du quatrième ordre, enveloppe des plans H; lorsqu'on y laisse μ constant, x, y, z sont les coordonnées des points successifs d'une génératrice de cette surface; au contraire, lorsqu'on y laisse λ constant, x, y, z sont les coordonnées des points d'une

conique ; cette conique est située dans le plan polaire de A, par rapport à la surface H_λ, et constitue une partie de l'intersection de la surface développable par ce plan ; le reste de l'intersection est constitué par la génératrice de contact de ce même plan et de la surface, cette génératrice étant comptée comme droite double.

Si l'on suppose que λ, μ et ν deviennent égaux, les formules donnant x, y, z définissent alors, quand λ varie, les points successifs de la cubique gauche arête de rebroussement de la développable ; cette cubique admet comme plans osculateurs particuliers les trois plans de coordonnées et le plan de l'infini.

Je vais montrer que le lieu des points M pour lesquels les trois plans Π qui y passent sont rectangulaires est la droite OA ; cette droite joue pour la développable le même rôle que la directrice pour une parabole. Pour cela, je remarque d'abord que les plans Π sont en même temps les plans principaux des quadriques du faisceau tangentiel S ; les centres de ces quadriques ont précisément pour lieu la droite OA, et de chaque point de cette droite sont issus trois plans Π rectangulaires, savoir les plans principaux de la quadrique S ayant son centre en ce point.

Il reste à faire voir qu'il ne peut exister d'autres systèmes de plans Π formant un trièdre trirectangle que ceux que nous venons de mentionner ; supposons en effet qu'il en existe, considérons l'un d'eux, et désignons par Π_1 l'un des trois plans qui le constituent, par Π_2 et Π_3 les deux autres et par D_1 l'intersection de ces derniers. Le plan Π_1 est plan principal pour une quadrique que nous appellerons S_1 et dont nous désignerons le centre par M_1 ; ce point M_1 est le sommet d'un trièdre trirectangle constitué par les plans principaux de S_1, et dont les faces appartiennent à la développable des plans π ;

l'une de ces faces est le plan Π_1, et les deux autres vont passer par le point d_1 situé à l'infini dans la direction D_1 qui est normale à Π_1.

Or par ce point d_1 ne passent, outre le plan de l'infini, que deux plans de la développable ; on en conclut que les plans Π_2 et Π_3 ne peuvent différer des deux autres plans principaux de S_1, et que le sommet du trièdre primitif doit se confondre avec M_1.

Nous avons ainsi montré que les systèmes de trièdres trirectangles formés de plans de la développable sont identiques aux systèmes de plans principaux des quadriques S successives.

Cinquième et sixième Partie. — La section de la surface enveloppe des plans Π par un de ces plans se compose, avons-nous dit, de la génératrice de contact comptée comme droite double, et d'une conique enveloppe des traces des autres plans de la développable sur le premier. Cette conique est complètement déterminée, car elle est tangente à la génératrice de contact de son plan, et aussi aux traces de ce plan sur les plans de coordonnées et sur le plan de l'infini ; elle est donc une parabole.

Nous déterminerons par le calcul le lieu des foyers de ces paraboles, en cherchant les coordonnées du foyer de celle de ces courbes qui est située dans un plan donné de la développable. Si nous nous reportons aux équations (2) et si nous y supposons λ fixe, μ et ν variables, elles fournissent les coordonnées des points du plan représenté par l'équation

$$\frac{xx_0}{a^2-\lambda}+\frac{yy_0}{b^2-\lambda}+\frac{zz_0}{c^2-\lambda}-1=0;$$

et ce plan, que nous appellerons Π_λ, appartient à la développable. A chaque système de valeurs données à μ

et à ν correspondent deux autres plans Π_μ et Π_ν représentés par les équations

$$\frac{xx_0}{a^2-\mu}+\frac{yy_0}{b^2-\mu}+\frac{zz_0}{c^2-\mu}-1=0,$$
$$\frac{xx_0}{a^2-\nu}+\frac{yy_0}{b^2-\nu}+\frac{zz_0}{c^2-\nu}-1=0,$$

et les traces de ces deux plans sur le premier sont deux tangentes à la parabole qui y est contenue; enfin, les valeurs de x, y, z fournies par les équations (2) sont précisément les coordonnées du point de rencontre de ces deux tangentes.

Pour que ce point soit le foyer de la parabole du plan Π_λ, il faut et il suffit que les droites d'intersection de ce plan avec les plans Π_μ et Π_ν soient deux droites isotropes, c'est-à-dire rencontrent le cercle imaginaire de l'infini.

Ces conditions sont exprimées par la relation facile à obtenir

$$\Phi(\mu)=\Sigma y_0^2 z_0^2 (b^2-c^2)^2(a^2-\lambda)^2(a^2-\mu)^2=0$$

et par la relation analogue $\Phi(\nu)=0$ obtenue en remplaçant μ par ν; autrement dit, les deux paramètres μ et ν doivent être les deux racines de l'équation $\Phi(\mu)=0$, où λ est fixe, et où μ est l'inconnue.

Il suffit de transporter les valeurs de ces racines à la place de μ et ν dans les formules (2) pour obtenir les coordonnées du foyer; la valeur de x est

$$x=x_0(b^2-a^2)(c^2-a^2)\frac{(a^2-\lambda)[(b^2-\lambda)^2 z_0^2+(c^2-\lambda)^2 y_0^2]}{\Sigma(a^2-\lambda)^2(b^2-c^2)^2 y_0^2 z_0^2},$$

et celles de y et de z sont analogues.

On voit que, lorsque λ varie, le foyer décrit une cubique gauche.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bulletin de la Société Mathématique de France, publié par les Secrétaires; t. XXV. Paris, 1897.

Mathematischen Annalen, publié par F. Klein, W. Dyck et A. Mayer; B. 49. Leipzig, 1897.

American Journal of Mathematics, publié par Th. Craig et S. Newcomb; V. 19. Baltimore, 1897.

Revue de Mathématiques spéciales, rédigée par Humbert et Papelier; 7e année. Paris, Nony, 1897.

Il Pitagora, publié par G. Fazzari; 3e année. Avellino, 1897.

L'Intermédiaire des Mathématiciens, publié par C.-A. Laisant et E. Lemoine; t. IV. Paris. Gauthier-Villars et fils, 1897.

Wiskundige opgaven. Amsterdam, Delsmann et Nolthenius, 1897.

Nieuw Archief voor Wiskunde, rédigé par J.-C. Kluyver, D.-J. Korteweg et P.-H. Schoute. Amsterdam, Delsmann et Nolthenius, 1897.

Bulletin de Mathématiques spéciales, dirigé par B. Niewenglowski; 3e année. Paris, Société d'éditions scientifiques, 1897.

Bulletin de Mathématiques élémentaires, dirigé par B. Niewenglowski; 2e année. Paris, Société d'éditions scientifiques, 1897.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences; 1897, 2e semestre, t. CXXV. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1897.

D.-A. Gravé. — Sur la construction des Cartes géographiques (Extrait du *Journal de Math. pures et appliquées*, 1896).

D.-A. Gravé. — De la meilleure représentation d'une contrée donnée (Extrait des *Comptes rendus de l'A. F., A. S.*, Congrès de Carthage, 1896).

E. Lasker. — An Essay on the geometrical Calculus (Extrait des *Proc. de la Soc. Math.* de Londres, Vol. XXVIII).

A. Boulanger. — Contribution à l'étude des équations différentielles linéaires et homogènes intégrables algébriquement (Thèse); Paris, Gauthier-Villars, 1897.

D.-A. Guillemin. — Sur la génération de la voix et du timbre. Paris, Société d'études scientifiques, 1897.

Eug. Cosserat. — Sur la déformation de certains paraboloïdes et sur le théorème de M. Weingarten (Extrait des *Comptes rendus*, Paris, 1897).

Eug. Cosserat. — Sur l'emploi de l'espace à quatre dimensions

dans l'étude des surfaces algébriques admettant plusieurs séries de coniques (Extrait des *Comptes rendus*, Paris, 1897).

Dr G. Cardoso-Luynes. — Le cubiche piane razionali circolari. Livourne, 1897.

P. Painlevé. — Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm. Paris, Hermann, 1897.

P. Painlevé. — Sur les intégrales premières des systèmes différentiels (Extrait des *Comptes rendus*, Paris, 1897).

P. Painlevé. — Sur les intégrales quadratiques des équations de la Dynamique (Extrait des *Comptes rendus*, Paris, 1897).

M. Frolov. — Recherches sur la théorie des parallèles. Paris, 1897.

P. Girardville. — Sur la théorie du vol des oiseaux (Extrait du *Bull. de la Soc. physico-math. de Kasan*, 1896).

W. Fr. Meyer. — Sur les progrès de la théorie des invariants projectifs (traduction par H. Fehr, avec une préface de M. d'Ocagne). Paris, Gauthier-Villars, 1897.

Wolfgang Bolyai de Bolya. — Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos puræ elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi cum appendice triplici. Editio secunda, tomus I : Conspectus arithmeticæ generalis. (Publication de l'Académie des Sciences de Hongrie par les soins de J. König et M. Rethy; avec un portrait de l'auteur; 679 pages, 11 planches. Buda Pesth, 1897.)

C. Burali-Forti. — Lezioni di Aritmetica pratica. Turin, 1897.

Th. Caronnet. — Problèmes de Mécanique; 1er fascicule : Statique. Paris, Nony, 1897.

E. Goursat. — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes; Tome I. Paris, Hermann, 1896.

C. Burali-Forti. — Il metodo del Grassmann nella Geometria proiettiva (Extrait des *Rendiconti del Circolo matem. di Palermo*, 1897).

C. Burali-Forti. — Una questione sui numeri transfiniti (Extrait des *Rendiconti del Circolo matem. di Palermo*, 1897).

ERRATA.

1897, page 437, ligne 1, *au lieu de* M₂*e*, *lisez* M'₂*e*.
Page 484, dernière ligne, *au lieu de* Duporq, *lisez* Duporcq.

[Q4a]

THÉORIE DES RÉGIONS;

Par M. E. CAHEN.

1. On sait que n points distincts déterminent sur une droite $n+1$ segments.

Dans un plan, n droites, dont deux quelconques ne sont pas parallèles, et dont trois quelconques ne passent pas par un même point, déterminent

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n}{1}+1$$

régions.

Dans l'espace, n plans, dont trois quelconques ne sont pas parallèles à une même droite et dont quatre quelconques ne passent pas par un même point, déterminent

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n}{1}+1$$

régions.

2. Ces formules se généralisent. Considérons, dans l'espace à p dimensions, n variétés à $p-1$ dimensions. Supposons que $p+1$ quelconques de ces variétés ne passent pas par un même point et que p quelconques ne soient pas parallèles à une même variété à une dimension. Je dis que le nombre de régions qu'elles forment est

$$P_n^p=\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}+\frac{n(n-1)\ldots(n-p+2)}{1.2\ldots(p-1)}+\ldots+\frac{n}{1}+1.$$

Cette formule s'établirait d'une façon analogue aux précédentes. On établirait d'abord la formule

$$P^p_n = P^p_{n-1} + P^{p-1}_{n-1};$$

puis, de proche en proche, on en déduirait la formule précédente.

3. L'énoncé purement algébrique de la question précédente est le suivant :

Étant données n fonctions linéaires de p variables, de combien de combinaisons de signes sont-elles susceptibles ?

On suppose que les déterminants d'ordre $p+1$, formés avec les coefficients des variables et les termes indépendants dans $p+1$ fonctions quelconques, ne soient pas nuls, et qu'il en soit de même des déterminants d'ordre p formés avec les coefficients des variables dans p fonctions quelconques.

Dans ces conditions, ce nombre est P^p_n.

Remarquons que, si $n \leqq p$,

$$P^p_n = 2^n,$$

ce qui veut dire que les n fonctions peuvent prendre tous les signes possibles. Autrement dit :

Un système de n inégalités du premier degré à p inconnues, dont les premiers membres satisfont aux conditions indiquées plus haut est toujours compatible si $n \leqq p$.

4. *Théorème*

$$P^p_n + P^{n-p-1}_n = 2^n.$$

Ce théorème se déduit immédiatement de la formule qui donne P^p_n.

5. Maintenant, étant données n fonctions linéaires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ à p variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$, satisfaisant aux conditions précédentes, quelles sont les combinaisons de signes, au nombre de P_n^p, dont elles sont susceptibles ?

Supposons que nous sachions résoudre ce problème pour la valeur $n - 1$ de l'indice n. Soit C une combinaison de signes possibles pour les fonctions X_1, $X_2, \ldots, X_{n-1}$.

Nous allons chercher de quel signe est susceptible X_n, étant donné que $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ ont les signes de la combinaison C. Nous recommencerons cette détermination pour toutes les combinaisons C et le problème sera résolu.

D'abord, la fonction X_n est-elle susceptible des deux signes ([1])? Si oui, elle sera, par continuité, susceptible de s'annuler. Posons donc $X_n = 0$.

On tire de cette équation la valeur de x_p, par exemple, en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$. On porte cette valeur dans les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$. Ces fonctions deviennent fonctions de $p - 1$ variables, et l'on verra si ces fonctions sont susceptibles des signes de la combinaison C. Si oui, c'est que cette combinaison est compatible avec les deux signes de X_n.

Sinon, elle n'est compatible qu'avec un signe de X_n qu'il reste à déterminer. Il suffit pour cela de substituer dans X_n un système de valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ donnant à $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ les signes de la combinaison C; ou encore un système de valeurs annulant p de ces fonctions et donnant aux $n - p - 1$ autres les signes de la combinaison C ([2]).

([1]) En langage géométrique : la variété $X_n = 0$ traverse-t-elle la région C?

([2]) En langage géométrique : un sommet de la région C.

Ce système de valeurs n'annule pas X_n, puisque, par hypothèse, $p+1$ fonctions ne s'annulent pas pour une même valeur des variables. On obtient donc pour X_n un certain signe qui est le signe cherché.

Les calculs sont très simples pour $p=1$. Pour $p=2$, la représentation géométrique est très facile à effectuer exactement, et remplace avantageusement le calcul.

6. Nous allons montrer que *le cas de $p+h$ fonctions à p variables se ramène à celui de $p+h$ fonctions à $h-1$ variables.*

Le problème est ainsi simplifié si

$$h-1<p.$$

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_p, X_{p+1}, \ldots, X_{p+h}$ ces $p+h$ fonctions linéaires de p variables.

Cherchons à déterminer $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{p+h}$ de façon que

$$(1) \quad \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_p X_p + \alpha_{p+1} X_{p+1} + \ldots + \alpha_{p+h} X_{p+h}.$$

soit identiquement nulle.

Nous obtenons $p+1$ équations linéaires entre les $p+h$ quantités α; nous pourrons exprimer ces $p+h$ quantités en fonctions linéaires de $h-1$ variables. Déterminons les P_{p+h}^{h-1} combinaisons de signes dont elles sont susceptibles. Ces combinaisons sont impossibles pour les fonctions X, puisque l'expression (1) est identiquement nulle.

Ce sont d'ailleurs *toutes* les combinaisons de signes impossibles pour les fonctions X. En effet, le nombre de ces combinaisons impossibles est $2^{p+h} - P_{p+h}^{p}$. Or ce nombre égale P_{p+h}^{h-1} d'après le théorème du n° 4.

Exemple :

$$X_1 = 3x_1 + x_2 - x_3 + 2,$$
$$X_2 = x_1 + x_2 + x_3 + 1,$$
$$X_3 = 4x_1 - x_2 + 2x_3 - 3,$$
$$X_4 = 6x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6,$$
$$X_5 = 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 11.$$

Posons

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 + \alpha_5 X_5 = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 2\alpha_5 &= 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 - 2\alpha_5 &= 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 - 5\alpha_4 + \alpha_5 &= 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 6\alpha_4 + 11\alpha_5 &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\alpha_1 = \frac{463\alpha_5 - 19}{41},$$

$$\alpha_2 = \frac{-165\alpha_5 + 5}{41},$$

$$\alpha_3 = \frac{-94\alpha_5 - 22}{41},$$

$$\alpha_4 = \frac{-155\alpha_5 - 4}{41}.$$

Les combinaisons de signes possibles pour α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 et par suite impossibles pour X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont contenues dans les colonnes du Tableau suivant, dont la construction est facile à comprendre.

α_5	$-\infty$ $\quad \frac{-4}{155}$	$\frac{-11}{47}$	0	$\frac{1}{33}$	$\frac{19}{463}$	$+\infty$
α_1	−	−	−	−	−	+
α_2	+	+	−	+	−	−
α_3	+	+	−	−	−	−
α_4	+	−	−	−	−	−
α_5	−	−	−	−	−	+

7. Dans ce qui précède nous avons supposé que $p+1$ quelconques des variétés ne passaient pas par un même point. Voyons ce qui arrive dans ce cas, ou plus géné-

ralement ce qui arrive lorsque h des variétés à $p-1$ dimensions passent par une variété de dimension h.

Soit $P_n^p(k, h)$ le nombre de régions formées. On peut calculer ces expressions de proche en proche par la formule

$$P_n^p(k,h) = P_{n-1}^p(k,h) + P_{n-1}^{p-1}(k, h-1),$$

valable pour $n-1 \geqq k$, et qui ramène le calcul de $P_n^p(k, h)$ à celui de $P_k^p(k, h)$. Ce dernier se fera au moyen de la formule

$$P_k^p(k,h) = P_{k-1}^p(k-1, h) + P_{k-1}^{p-1}(k-1, h).$$

On arrive ainsi par un calcul de récurrence sans difficulté à la formule générale

$$\begin{aligned} P_n^p(k,h) = 2(1 + C_{n-k}^1 + C_{n-k}^2 + \ldots + C_{n-k}^h)(1 + C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2 + \ldots + C_{k-1}^{p-h-1}) \\ + C_{n-k}^{h+1}(1 + C_k^1 + \ldots + C_k^{p-h-1}) \\ + C_{n-k}^{h+2}(1 + C_k^1 + C_k^2 + \ldots + C_k^{p-h-2}) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + C_{n-k}^{p-1}(1 + C_k^1) \\ + C_{n-k}^p. \end{aligned}$$

C_r^s désignant comme à l'ordinaire l'expression

$$\frac{r(r-1)\ldots(r-s+1)}{1.2\ldots s}.$$

Cette formule est générale en faisant les conventions que

$$P_n^p(k, h) = P_n^p$$

lorsque $h \leqq -1$ et que

$$P_n^p(k, h) \quad \text{ou} \quad P_n^p$$

sont égaux à un quand $p = 0$ et à zéro quand p est négatif.

8. Une autre singularité que peuvent présenter les n variétés c'est que k d'entre elles soient parallèles à

une même variété de dimension h. Si l'on appelle $\Pi_n^p(k, h)$ le nombre de régions formé, on trouve

$$\begin{aligned}\Pi_n^p(k, h) = {} & (1 - C_k^1 + \ldots \pm C_k^{p-h})(1 + C_{n-k}^1 + \ldots + C_{n-k}^h) \\ & + C_{n-k}^{h+1}(1 - C_k^1 + \ldots + C_k^{p-h-1}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + C_{n-k}^{p-1}(1 - C_k^1) \\ & + C_{n-k}^p.\end{aligned}$$

9. Maintenant si l'on considérait n variétés à $p - 1$ dimensions dont k passent par une variété de dimension h, k' par une variété de dimension h', etc., k_1 sont parallèles à une variété de dimension h_1, k'_1 à une variété de dimension h'_1, etc. ; sans établir de formule générale, on pourra, en tout cas, calculer le nombre de régions formées.

Par exemple, cherchons le nombre de régions formées par six plans, dont trois passent par une même droite D et trois par une autre droite D′ ne rencontrant pas D.

Faisons abstraction d'un plan, les cinq autres forment

$$P_5^3(3, 1) = 22 \text{ régions.}$$

Or le sixième plan coupe les cinq précédents suivant cinq droites, dont trois passent par un même point et deux coïncident. Le nombre des régions formées par ces droites est

$$P_4^2(3, 0) = 10.$$

Donc le nombre cherché égale $22 + 10 = 32$.

Si les deux droites D et D′ se rencontraient, il faudrait raisonner autrement et l'on trouverait

28 régions.

De même la détermination des combinaisons de signes correspondant à chacune de ces régions se fera par une méthode analogue à celle du n° 5.

[A3l] [H12bα]

RACINES DE QUELQUES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES. INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION AUX DIFÉRENCES MÊLÉES;

Par M. E.-M. LÉMERAY.

On peut facilement ramener quelques équations transcendantes aux types

$$x = a^x, \qquad x^x = a.$$

que j'ai étudiés dans deux Notes précédentes (décembre 1896, février 1897). Soit l'équation

$$x^{x^m} = a.$$

élevons les deux membres à la puissance m, puis posons $x^m = y$, $a^m = b$, elle devient

$$y^y = b.$$

Équation $xa^x = b$. — Élevons a à la puissance exprimée par les deux membres, on a

$$a^{xa^x} = a^b = c,$$

d'où

$$a^x = \sqrt[2]{c} \quad \text{et} \quad x = b\sqrt[2]{c}^{-1}.$$

L'équation $a^x = kx$ se ramène à la précédente en l'écrivant

$$xa^{-x} = k^{-1}.$$

L'équation $a^x = x + b$ se ramène à son tour à la précédente en écrivant

$$a^z = a^b z$$

et posant $x + b = z$.

On peut également réduire les équations un peu plus

générales

$$(ax)^{bx^c} = m, \qquad (ax)^{px} b^{qx} = m, \qquad (x - k)^m a^{px+q} = b.$$

Pour la première posons $ax = y$, élevons les deux membres à la puissance $b^{-1}ca^c$; posant ensuite $y^c = z$, $m^{b^{-1}ca^c} = n$, elle devient

$$z^z = n.$$

Pour la deuxième posons encore $ax = y$, élevons à la puissance $p^{-1}c$, on est ramené à la forme $zA^z = B$. La troisième se ramène au même type en posant $x + k = y$. En achevant les calculs, on remarquera que x s'exprime sans que le signe logarithmique y figure.

En résolvant ces équations, il faut d'une part éliminer les racines étrangères introduites; de l'autre, constater que l'on a obtenu toutes les racines de la proposée. Cherchons, par exemple, les intersections réelles des deux courbes $y = a^x$ et $y = bx^2$ ($a > 1$ et $b > 0$).

La *fig.* 1 nous montre qu'il y a toujours une racine

Fig. 1.



réelle négative et qu'il peut exister deux racines réelles égales ou inégales.

Pour résoudre l'équation $a^x = bx^2$ qui rentre d'ailleurs dans un des types signalés plus haut, on peut

l'écrire

$$\sqrt{a}^{-x} = \sqrt{b}\,x,$$

et l'on a

$$x = \frac{1}{\sqrt{b}}\left(\sqrt[2]{\sqrt{a}^{-\frac{1}{\sqrt{b}}}}\right)^{-1}.$$

Pour que les deux racines positives soient égales il faut que l'on ait

$$\sqrt[2]{\sqrt{a}^{-\frac{1}{\sqrt{b}}}} = \frac{1}{e},$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{a}^{-\frac{1}{\sqrt{b}}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}},$$

ou encore

$$\sqrt{a}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} = e^{\frac{1}{e}} \qquad \text{ou} \qquad a = e^{\frac{2\sqrt{b}}{e}}.$$

Si a est plus petit que cette valeur, on aura deux racines réelles inégales. Il est clair qu'il faut prendre les radicaux $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ avec le seul signe $+$. On n'obtient pas ainsi la racine négative. Pour l'avoir on changera x en $-x$ et l'on est amené à résoudre l'équation $bx^2 = \frac{1}{a^x}$ qu'on peut écrire $x\sqrt{a}^{-x} = \frac{1}{\sqrt{b}}$ et l'on a

$$x = \frac{1}{\sqrt{b}}\left(\sqrt[2]{\sqrt{a}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}}\right)^{-1},$$

qu'il faudra changer de signe; ainsi les trois racines réelles seront données par la même formule où $\sqrt{a}$ est pris avec le signe $+$; $\sqrt{b}$ avec le signe $+$ pour avoir les deux racines positives, et avec le signe $-$ pour avoir la racine négative.

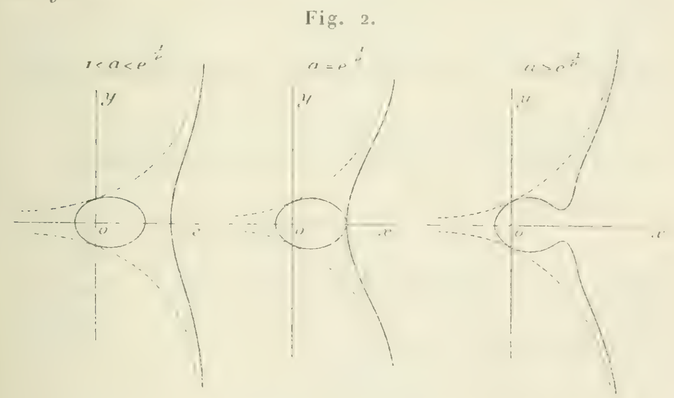
Le symbole de la surracine deuxième permet encore

de résoudre quelques questions. Considérons la courbe représentative de la fonction

$$y = \sqrt{a^{2x} - x^2}$$

[en coordonnées polaires l'équation de cette courbe est $\rho = a^{\rho\cos\omega}$; en coordonnées semi-polaires (abscisse et rayon vecteur) elle est $\rho = a^x$]. Pour $a > 1$, elle peut présenter trois formes, suivant que a est plus petit que $e^{\frac{1}{e}}$, égal à $e^{\frac{1}{e}}$ ou plus grand que $e^{\frac{1}{e}}$. On trouve facilement que pour x infini et positif elle est asymptote aux courbes $y = \pm a^x$ (*fig.* 2), qu'elle est tangente à ces courbes pour $x = 0$; qu'en chacun des points réels où elle coupe l'axe Ox, elle admet une tangente parallèle à Oy.

Fig. 2.



Cherchons les abscisses de ces points d'intersection : pour $y = 0$ il faut avoir $a^x = x$ ou $a^{-x} = x$; les deux racines réelles positives seront les deux valeurs de $\frac{1}{\sqrt[x]{a}}$, égales si $a = e^{\frac{1}{e}}$, inégale si a est plus petit que $e^{\frac{1}{e}}$. La racine négative sera $-\frac{1}{\sqrt[x]{a}}$.

Cherchons aussi les abscisses des points où la courbe admet une tangente horizontale. On a

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{a^{2x}\,\mathrm{L}a - x}{\sqrt{a^{2x} - x^2}}.$$

On a donc à résoudre l'équation $a^{2x}\mathrm{L}a - x = 0$; posons $x = \frac{\mathrm{L}a}{z}$; il vient

$$a^{\frac{2\mathrm{L}a}{z}} = \frac{1}{z} \qquad \text{ou} \qquad z^z = a^{\frac{1}{2\mathrm{L}a}};$$

on a donc

$$z = \sqrt[z]{a^{-2\mathrm{L}a}} \qquad \text{et} \qquad x = \frac{\mathrm{L}a}{\sqrt[z]{a^{-2\mathrm{L}a}}}.$$

Les deux valeurs seront distinctes, si la surracine en a deux, c'est-à-dire si l'on a

$$1 < a^{2\mathrm{L}a} < e^{\frac{1}{e}}.$$

Les deux valeurs seront égales (point stationnaire) si l'on a

$$a^{2\mathrm{L}a} = e^{\frac{1}{e}}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{L}a = \frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

L'abscisse est alors

$$x = \frac{1}{\sqrt{2e}}\left(\sqrt[z]{\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2e}} = \sqrt{\frac{e}{2}},$$

et l'ordonnée a pour valeur

$$y = \sqrt{e - \frac{e}{2}} = \sqrt{\frac{e}{2}}.$$

Elle est donc égale à l'abscisse.

Quand on fait a égal à 1, la courbe se réduit à un cercle de rayon 1, décrit autour de l'origine pour centre et à une droite parallèle à Oy à l'infini.

Intégration de l'équation

$$y^m p - a y_1^{m'} = 0.$$

dans laquelle a et i sont deux constantes, y_{-i} étant la valeur de la fonction quand la variable a pour valeur $x - i$.

D'après la série de Taylor, on a

$$y^{(m)}_{-i} = y^{(m)} - \frac{i}{1!}\,y^{(m+1)} + \frac{i^2}{2!}\,y^{(m+2)} - \ldots.$$

On a donc à résoudre l'équation linéaire d'ordre infini à coefficients constants

$$0 = y^{(m+p)} - a\left(y^{(m)} - \frac{i}{1!}\,y^{(m+1)} + \ldots\right).$$

L'équation caractéristique peut s'écrire

$$r^{m+p} - a r^m e^{-ir} = 0.$$

Elle admet d'abord les m racines $r = 0$; ce qui donnera un polynome de degré m représentant l'ensemble des m intégrales particulières indépendantes de i ; il reste

$$r^p = a e^{-ir}.$$

Pour la résoudre, élevons les deux membres à la puissance $\frac{1}{p}$,

$$(a^{-\frac{1}{p}})\,r = (e^{-\frac{i}{p}})^r,$$

ce qui la ramène à la forme $Ax = B^x$ vue précédemment, et les racines seront

$$r = -\,a^{p^{-1}}\left(\sqrt[2]{e^{p}\ \ a^{p}}\right)^{-1}.$$

Suivant les valeurs attribuées aux quantités a, p, i, il pourra ou non exister des racines réelles ; il y en aura trois au plus. En désignant par P, R, S ces trois racines, on en tire les intégrales particulières

$$y = C_{m+1}e^{Px}, \qquad y = C_{m+2}e^{Rx}, \qquad y = C_{m+3}e^{Sx}\ [1].$$

[1] Si R et S sont égales, on aura $y = e^{Rx}(C_{m+2} + C_{m+3}x)$.

En ce qui concerne les racines imaginaires qui sont conjuguées deux à deux, et d'ordre simple, elles ont pour valeurs

$$ap^{-1}\left[u(-p^{-1}iap^{-1}) \pm \sqrt{-1}\,v(-p^{-1}iap^{-1})\right],$$

u et v étant les fonctions considérées dans notre Note du numéro de février.

En ne tenant pas compte des racines étrangères, que l'on reconnaîtra d'ailleurs facilement, il restera une infinité d'intégrales particulières de la forme

$$y = e^{ap^{-1}u(z)}\left\{A\cos[ap^{-1}v(z)]x + B\sin[ap^{-1}v(z)]x\right\},$$

où l'on a posé

$$-p^{-1}iap^{-1} = (z),$$

et A et B étant deux constantes arbitraires.

---

[14]

SUR LE CARACTÈRE QUADRATIQUE DU NOMBRE 3 PAR RAPPORT A UN NOMBRE PREMIER QUELCONQUE;

Par M. Raoul BRICARD.

Euler, Legendre et plus récemment Stieltjes [1] ont donné des démonstrations simples des théorèmes relatifs aux caractères quadratiques des nombres — 1 et 2 par rapport à un module premier. Je me propose d'indiquer dans cette Note comment on peut, par une méthode élémentaire, déterminer les nombres premiers dont le nombre 3 est ou n'est pas résidu quadratique.

(1) Voir l'*Introduction à l'Étude de la Théorie des Nombres et de l'Algèbre supérieure*, de MM. E. Borel et J. Drach.

Soit p un nombre premier et m_1 un nombre quelconque de la suite 2, 3, ..., $p-1$. On peut déterminer un nombre entier m_2, inférieur à p et tel que l'on ait

$$m_1 m_2 \equiv m_1 - 1 \pmod{p}.$$

Il est évident que l'on n'a ni

$$m_2 \equiv 0 \pmod{p},$$

ni

$$m_2 \equiv 1 \pmod{p};$$

m_2 appartient donc à la même suite que m_1.

Le nombre m_2 ainsi obtenu permet de déterminer un nombre m_3, appartenant à la suite 2, 3, ..., $p-1$, tel que l'on ait

$$m_2 m_3 \equiv m_2 - 1 \pmod{p},$$

et ainsi de suite.

La suite de nombres ainsi obtenue, m_1, m_2, m_3, ... donne lieu aux remarques suivantes :

1° Si m_2 est différent de m_1, il en est de même de m_3. En effet, on aurait, dans le cas contraire,

$$m_2 m_1 \equiv m_2 - 1 \equiv m_1 - 1 \pmod{p},$$

d'où

$$m_2 \equiv m_1,$$

ce qui serait contraire à l'hypothèse.

2° On a toujours, au contraire,

$$m_4 = m_1.$$

Écrivons, en effet, de la manière suivante, les congruences qui déterminent successivement les nombres m_2, m_3, m_4 :

$$m_1(m_2 - 1) \equiv -1 \pmod{p},$$

$$m_2 m_3 \equiv m_2 - 1 \pmod{p},$$

$$m_2(m_3 - 1) \equiv -1 \pmod{p},$$

$$m_3 m_4 \equiv m_3 - 1 \pmod{p}.$$

La seconde congruence est écrite de deux manières différentes.

Multiplions membre à membre la première et la deuxième congruence. Opérons de même sur la troisième et la quatrième. Il vient, après divisions par des facteurs incongrus à zéro,

$$m_1 m_2 m_3 \equiv -1 \pmod{p},$$
$$m_2 m_3 m_4 \equiv -1 \pmod{p},$$

d'où l'on tire

$$(m_1 - m_4) m_2 m_3 \equiv 0 \pmod{p},$$

et, par suite,

$$m_1 = m_4.$$

3° Enfin il peut arriver que l'on ait $m_2 = m_1$. Alors tous les termes de la suite m_1, m_2, ... seront identiques. m_1 est dans ce cas une racine de la congruence

$$x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

qui admet aussi la racine $p + 1 - m$, et celle-là seulement, comme on le voit immédiatement. Cette nouvelle racine est nécessairement distincte de la première, si l'on suppose $p \neq 3$. En effet, on aurait, dans le cas contraire,

$$m_1 = p + 1 - m_1, \quad \text{d'où} \quad m_1 = \frac{p+1}{2},$$

et, par suite,

$$\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p+1}{2}\right) + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

ou

$$p^2 + 3 \equiv 0 \pmod{p},$$

congruence impossible.

On peut résumer ainsi ce qui précède : si la congruence

$$x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

est impossible, les nombres de la suite 2, 3, ..., $p - 1$ se répartissent en un certain nombre de groupes de trois

termes, et l'on a nécessairement

$$p - 2 \equiv 0 \pmod 3,$$

et le nombre p est de la forme $3q + 2$.

Si au contraire cette congruence est possible, la même suite comprend deux nombres satisfaisant à cette congruence, plus un certain nombre de groupes de trois termes.

On a alors

$$p - 2 - 2 \equiv 0 \pmod 3.$$

Le nombre p est de la forme $3q + 1$.

Les réciproques sont évidemment vraies.

Remarquons maintenant que la congruence

$$x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod p$$

peut s'écrire

$$(2x - 1)^2 + 3 \equiv 0 \pmod p.$$

Elle est donc possible ou impossible, suivant que l'on a

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = 1 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{-3}{p}\right) = -1,$$

et l'on en déduit le théorème suivant :

Le nombre -3 *est résidu quadratique des nombres premiers de la forme* $3q + 1$, *et non résidu des nombres premiers de la forme* $3q + 2$.

En combinant ce théorème avec les théorèmes relatifs au caractère quadratique du nombre -1, on obtient facilement la valeur du symbole $\left(\frac{3}{p}\right)$ pour toutes les valeurs du nombre premier p. Je n'insiste pas sur le résultat bien connu que l'on obtient ainsi : mon but était simplement de montrer comment on peut y parvenir par les procédés les plus élémentaires.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1897. — COMPOSITIONS.

Lille.

Certificat de Calcul différentiel et intégral.

1. *Énoncer et démontrer les propriétés principales des fonctions définies par les égalités suivantes*

$$\sigma(z) = z\,\Pi\left(1 - \frac{z}{w}\right)e^{\frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}},$$

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}, \qquad p(z) = -\zeta'(z).$$

On suppose que l'on donne à w *toutes les valeurs comprises dans la formule*

$$w = 2k\omega + 2k'\omega',$$

ω, ω' *étant deux constantes données dont le rapport est imaginaire,* k *et* k' *deux entiers susceptibles de prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives ou nulles sans pouvoir toutefois s'annuler en même temps.*

Montrer comment toute fonction doublement périodique et méromorphe peut s'exprimer à l'aide d'une fonction $\zeta(z)$ *et de ses dérivées.*

2. *Intégrer l'équation linéaire*

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 12x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 60x\frac{dy}{dx} - 120y = 2x^4.$$

N. B. — L'équation algébrique qu'on est conduit à résoudre a ses racines commensurables.

Certificat de Géométrie supérieure.

1. *Donner les différentes définitions des lignes de courbure d'une surface; montrer qu'elles sont équivalentes; établir l'équation différentielle des lignes de courbure : application aux surfaces du second ordre.*

Démontrer les propriétés fondamentales des lignes de courbure en général, leur conservation dans la transformation par inversion, leur rôle dans la théorie des systèmes triples orthogonaux.

2. *Lignes asymptotiques d'une surface de révolution; déterminer le méridien de telle sorte que les lignes asymptotiques se projettent sur le plan des parallèles suivant des spirales logarithmiques ayant le pied de l'axe pour pôle.*

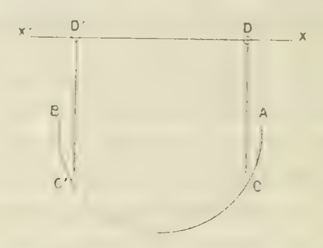
Certificat de Mécanique rationnelle

1. 1° *Établir les équations de Lagrange pour un point matériel mobile, sans frottement, sur une surface fixe ou mobile.*

2° *En supposant que cette surface soit fixe, et que la force appliquée au mobile dérive d'un potentiel, ramener les équations du mouvement à la forme canonique; puis montrer que, si l'on en connait une intégrale première, distincte de celle des forces vives, leur intégration s'achève à l'aide de quadratures.*

2. *Un tube homogène pesant* AB, *de section négligeable, et ayant la forme d'une demi-circonférence, est suspendu à une tige rectiligne horizontale fixe* xx'.

à l'aide de deux tringles CD, C'D' *terminées par des anneaux très petits* D *et* D'. *Ces tringles, invariablement fixées au tube en* C *et* C', *sont égales et symé-*



triquement placées, de manière que, dans toutes les positions du tube, le diamètre AB *reste parallèle à* xx'.

Quand le tube AB *est immobile dans sa position d'équilibre stable, on abandonne à elle-même en* A, *sans vitesse initiale, une petite sphère pesante* S, *ayant un diamètre un peu inférieur à celui du tube, de manière qu'elle puisse y pénétrer.*

On demande d'étudier dans ces conditions, et sans tenir compte du frottement, les mouvements de la sphère S *et du tube* AB. *On désignera par* m *la masse de cette sphère et par* m' *la masse du solide formé par le tube et les deux tringles.*

CERTIFICAT D'ASTRONOMIE.

1. *Détermination de la parallaxe du Soleil par les passages de Vénus.*

N. B. — On suppose connues les formules de la parallaxe en longitude et en latitude, savoir

$$\delta l = \frac{r_0 \mathrm{P} \cos\lambda_0}{\cos\lambda} \sin(l - l_0), \qquad \delta\lambda = \frac{r_0 \mathrm{P} \sin\lambda_0}{\sin\varphi} \sin(\lambda - \varphi),$$

r_0, l_0, λ_0 *étant les coordonnées écliptiques du lieu d'observation,* l, λ, P *la longitude, la latitude et la*

parallaxe horizontale de l'astre observé, φ un angle défini par la formule $\tan\varphi = \frac{\tan\lambda_0}{\cos(l - l_0)}$.

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

1. *Théorie du volant. On traitera seulement les questions suivantes :*

1° *Rôles distincts du volant et du régulateur ;*

2° *Formule permettant de déterminer le moment d'inertie, le poids et les dimensions du volant, connaissant la puissance* Φ *de la machine en chevaux, le nombre de tours* N *par minute, le coefficient de régularité m, le rapport*

$$K = \frac{T}{\theta},$$

où T *désigne le travail moteur pour un tour et* θ *la plus grande valeur de la différence entre le travail moteur et le travail résistant, et enfin la valeur v adoptée pour la vitesse moyenne à la jante ;*

3° *Méthode employée pour déterminer le rapport* K *dans la pratique.*

2. *Une machine à vapeur pour laquelle on a* $\Phi = 30$, $N = 60$, $m = 80$, $K = 10$, $v = 12$, *fonctionne en régime normal, quand, par suite d'un accident, les résistances sont brusquement réduites aux résistances passives, propres à la machine, qui représentent un travail égal au dixième seulement du travail moteur. On suppose en outre que le régulateur soit, par suite du même accident, empêché de fonctionner, de manière que le travail moteur par tour garde sa valeur normale.*

Dans ces conditions on demande de déterminer approximativement les nouvelles valeurs de la vitesse v après 1, 2, ..., *n tours, de manière à voir à peu près*

le temps dont dispose le mécanicien, pour arrêter l'arrivée de la vapeur avant que la machine ait pris une vitesse dangereuse.

Marseille.

Certificat de Mécanique.

Sur une droite horizontale Ox *sont mobiles, sans frottement, trois points de même masse* A, B, C.

Le point A *est relié au point* B *par un fil élastique, et le point* B *est relié au point* C *par un fil élastique*



identique au premier; ces fils s'allongent proportionnellement à leur tension.

A l'origine du temps, les points A, B, C *sont sans vitesse et les fils sont à l'état naturel.*

On fait alors agir sur le point A *une force* F *constante et dirigée suivant* Ox, *et l'on demande de trouver le mouvement du système sachant qu'on néglige la masse des fils, que la longueur primitive de chacun d'eux est a, et qu'une tension égale à* F *doublerait la longueur de chacun de ces fils.*

On développera les valeurs des abscisses des mobiles en séries ordonnées suivant les puissances du temps, et l'on poussera ce développement jusqu'à la sixième puissance inclusivement.

Solution.

On est conduit au type d'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \rho x = h \cos kt + \alpha t^2 + \beta.$$

En négligeant t^5, le point A est seul déplacé.

En négligeant t^6, les points A et B sont seuls déplacés.

CERTIFICAT D'ANALYSE INFINITÉSIMALE (CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL).

1° *Soient* Ox, Oy, Oz *trois axes rectangulaires, et soit* $z = f(x, y)$ *l'équation d'une surface rapportée à ces axes.*

Définir en un point le paraboloïde osculateur dont l'axe est la normale à la surface.

En considérant l'indicatrice comme la section du paraboloïde osculateur par un plan parallèle au plan tangent au sommet et situé à une distance de ce plan égale à l'unité, trouver l'équation de la projection de l'indicatrice sur le plan xOy.

Rappeler, sans démonstration, l'équation aux rayons de courbure principaux.

On appellera p, q, r, s, t *les dérivées partielles des deux premiers ordres de* z *par rapport à* x *et à* y.

2° *Soit posé* $t = x + y\sqrt{-1}$, $u = X + Y\sqrt{-1}$, *on suppose que* X *et* Y *soient des fonctions réelles des deux variables réelles et indépendantes* x *et* y, *et tellement choisies que* u *puisse être considéré comme une fonction analytique de* t. *On peut représenter la variable* t *dans le plan* xOy, *et au point* t *élever une perpendiculaire au plan* xOy, *sur laquelle on prendra des longueurs respectivement égales à* X *et à* Y. *On aura ainsi deux surfaces, dont les équations peuvent être écrites*

$$z_1 = X(x, y) \quad \text{et} \quad z_2 = Y(x, y).$$

Démontrer :

1° *Que l'on a entre les dérivées partielles de* z_1 *et*

de z_2 *les relations*

$$p_2 = -q_1, \qquad q_2 = -p_1,$$
$$r_1 = -t_1 = s_2, \qquad r_2 = -t_2 = -s_1;$$

2° *Que les projections sur le plan* xOy *des indicatrices des surfaces* X *et* Y *aux points homologues sont deux hyperboles équilatères égales, et que les asymptotes de l'une coïncident avec les axes de l'autre ;*

3° *Que le produit des rayons de courbure principaux est le même dans les deux surfaces aux points homologues.*

Solution.

Pour la première partie, on développe en série. Soit, en prenant le point sur l'axe des z,

$$z - z_0 = px + qy + rx^2 + 2sxy + ty^2 + \ldots.$$

Un point étant à une distance égale à l'unité du plan tangent au point $(0, 0, z_0)$, on aura

$$\frac{z' - z_0 - px' - qy'}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 1,$$

et, s'il est sur la surface, on aura

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2 + \ldots.$$

On tire de là facilement la projection de l'indicatrice sur le plan des xy.

Pour la seconde partie, *voir* le *Traité des Fonctions elliptiques* (2e édit., p. 8) de Briot et Bouquet.

Certificat d'Astronomie.

Épreuve écrite. — 1° *Définir la parallaxe d'un astre ;*

2° *Indiquer la relation simple qui existe entre la parallaxe horizontale et la parallaxe de hauteur, dans l'hypothèse de la sphéricité de la Terre ;*

3° *Admettant que la surface terrestre est un ellipsoïde de révolution autour de l'axe des pôles, établir les formules rigoureuses qui permettent de passer de l'ascension droite* (α) *et de la déclinaison* (δ) *géocentriques à l'ascension droite* (α') *et la déclinaison* (δ') *pour un point de la surface terrestre ;*

4° *Développer en séries les différences* $\alpha' - \alpha$ *et* $\delta' - \delta$;

5° *Formules pratiques pour les astres autres que la Lune.*

Nancy.

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Première question. — *Intégrer le système d'équations différentielles linéaires simultanées du premier ordre*

$$\frac{dy}{dx} - 3y + z = -8e^{-x},$$

$$\frac{dz}{dx} - 4y + 2z = -4e^{-x};$$

on exposera sur cet exemple une méthode d'intégration d'un tel système.

Deuxième question. — *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on considère les sphères* (Σ) *ayant leur centre sur* Oz *et dont le rayon a une longueur donnée* R.

1° *Démontrer que les trajectoires orthogonales de ces sphères sont des courbes* (C) *situées dans des plans passant par* Oz, *et que chacune d'elles est une trajectoire orthogonale d'une famille de cercles de rayon* R. *Les coordonnées des points de l'une quelconque de ces courbes, située dans le plan*

$$y = x \operatorname{tang} \alpha.$$

peuvent être représentées par les équations

$$(1)\quad \begin{cases} x = R \sin u \cos v, \\ y = R \sin u \sin v, \\ z = R \cos u + R \operatorname{Log}\left(\operatorname{tang} \dfrac{u}{2}\right) + c, \end{cases}$$

c désignant une constante et u l'angle de la tangente à la courbe avec Oz.

2° *Lorsqu'on remplace c par une fonction de v et qu'on regarde u et v comme variables, les équations précédentes définissent une surface* (S) *engendrée par des courbes* (C) ; *démontrer qu'elle coupe orthogonalement chacune des sphères* (Σ), *et que ses lignes de courbure sont d'une part ses courbes d'intersection avec les sphères* (Σ), *d'autre part les positions successives de la génératrice* (C).

3° *Lorsqu'on suppose* $c = 0$, *les formules* (1) *définissent une surface* (S_0) *qui est de révolution autour de* Oz ; *déterminer le produit de ses rayons de courbure principaux.*

Épreuve pratique. — *On considère la portion de la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par* $y = \sin x$ *et comprise entre les points d'abscisse* $x = 0$ *et* $x = \pi$; *on demande de déterminer :*

1° *L'aire comprise entre la courbe et l'axe des* x ;

2° *Le volume engendré par cette aire en tournant autour de* Ox ;

3° *L'aire de la surface de révolution limitant ce volume.*

Solutions.

1re *question.*

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + 2 e^{x},$$
$$z = -c_1 e^{2x} + 4 c_2 e^{-3x} - 4 e^{x}.$$

2ᵉ *question.* — Les trajectoires orthogonales des sphères de rayon R dont le centre se déplace sur Oz sont des courbes dont la tangente en chaque point rencontre Oz et a une longueur constante égale à R ; ce sont des tractrices dans des plans passant par Oz ; ces courbes C sont toutes égales entre elles et se déduisent de l'une d'elles par translation parallèle à Oz et par rotation autour de cet axe.

Si l'on considère une surface S engendrée par le déplacement d'une courbe C, la tangente à la génératrice en un point est le rayon de la sphère Σ qui passe par ce point ; par suite S est orthogonale à chacune des sphères Σ, et les courbes d'intersection de S et de ces sphères Σ sont lignes de courbure de S ; comme ces lignes coupent à angle droit chacune des génératrices C, celles-ci sont les deuxièmes lignes de courbure de la surface.

Lorsque $c = 0$, on a une surface de révolution qui n'est autre que la pseudo-sphère ; le produit des rayons de courbure principaux est constamment égal à $-R^2$.

Épreuve pratique. — Les résultats sont respectivement

$$2, \quad \frac{\pi^2}{2}, \quad 2\pi\left[\sqrt{2} - \mathrm{Log}(1+\sqrt{2})\right].$$

Certificat de Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Un gyroscope formé d'un tore, d'un disque et d'un anneau extérieur à la façon ordinaire, est fixé par son centre O ; son anneau extérieur tourne d'un mouvement uniforme de rotation de vitesse angulaire ω autour de la verticale passant par O.*

On désigne par A le moment d'inertie équatorial du tore, par C son moment d'inertie axial, par A' le

moment d'inertie équatorial du disque, par C' son moment d'inertie axial, et l'on suppose que l'on ait

$$C' = 2A' = 2A = \frac{2C}{\omega}.$$

On demande :

1° *Quelle vitesse angulaire initiale de rotation il faut imprimer au tore autour de son axe pour que cet axe placé horizontalement et abandonné sans vitesse initiale tende indéfiniment vers la nadirale sans jamais l'atteindre ?*

2° *D'établir la loi du mouvement du tore autour de son axe.*

Épreuve pratique. — *On envisage un arc de chaînette homogène dont les extrémités, situées du même côté du sommet, sont les points où la normale à la courbe fait avec son axe des angles respectivement égaux à 30° et 70° ; la distance du sommet à la directrice est égale à 30cm.*

On demande de déterminer le centre de masse de cet arc et celui de la masse homogène comprise entre cet arc, les parallèles à l'axe de la chaînette menées par ses extrémités, et la directrice de la courbe.

Solution.

La théorie du gyroscope de l'énoncé se ramène, d'après les formules de Bour et de Gilbert, à celle du pendule à plan tournant.

Si θ est l'angle formé à l'instant t par l'axe du tore avec la verticale vers le bas, θ_0 l'angle formé à l'instant initial, φ l'angle définissant à chaque instant la position du tore dans sa rotation autour de son axe, et n la vitesse initiale de cette rotation, on sait que l'on a

$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = n - \omega(\cos\theta - \cos\theta_0);$$

de plus, le mouvement de l'axe du tore est le même que celui d'un pendule simple de longueur δ_1 dont le plan tourne autour de la verticale avec la vitesse constante ω_1, δ_1 et ω_1 étant donnés par

$$\delta_1 = g \frac{A - A'}{C\omega(n - \omega \cos\theta_0)}, \qquad \omega_1 = \omega \sqrt{\frac{A - C - A'}{A + A'}}.$$

Le mouvement de ce pendule est donné par l'équation

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \omega_1^2 (\cos\theta - \cos\theta_0)(a - \cos\theta),$$

lorsqu'on pose

$$a = \frac{2g}{\delta_1 \omega_1^2} - \cos\theta_0 ;$$

pour que θ tende vers zéro lorsque le temps augmente indéfiniment, il faut et il suffit que a soit égal à l'unité ; cette condition conduit, avec les données du problème, à $n = 1$.

L'équation qui fournit θ devient alors

$$-\omega\, dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}\,(1 - \cos\theta)} ;$$

la substitution $\cos\theta(u^2 - 1) = 1$ la ramène à la forme

$$\omega\, dt = \frac{2\, du}{u^2 - 2},$$

et l'on obtient de cette façon, en tenant compte des conditions initiales,

$$\frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{e^{\omega\sqrt{2}t} + 1}{e^{\omega\sqrt{2}t} - 1},$$

$$\cos\theta = \frac{(e^{\omega\sqrt{2}t} - 1)^2}{2(e^{\omega\sqrt{2}t} + 1)^2 - (e^{\omega\sqrt{2}t} - 1)^2}.$$

Quant à φ, il est fourni par l'équation (1), qui devient ici

$$d\varphi = dt - \cos\theta\, \omega\, dt.$$

d'où

$$\varphi - \varphi_0 = t - \int_0^t \cos\theta\,\omega\,dt;$$

en introduisant la variable u dans la dernière intégrale on a

$$\varphi - \varphi_0 = t - \int_\infty^u \frac{2\,du}{(u^2-2)(u^2-1)}$$

$$= t - \operatorname{Log}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\left(\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

ou

$$\varphi - \varphi_0 = t(1-\omega) - \operatorname{Log}\frac{(\sqrt{2}+1)e^{\omega\sqrt{2}t} + \sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2}-1)e^{\omega\sqrt{2}t} + \sqrt{2} + 1}.$$

Lorsque t augmente indéfiniment, le mouvement du tore autour de son axe tend à devenir un mouvement de rotation uniforme avec la vitesse $1 + \omega$.

Certificat d'Astronomie.

Épreuve écrite. — Première question. — *Connaissant les six éléments d'une planète, calculer pour une époque donnée les coordonnées géocentriques de la planète.*

Deuxième question. — *Démontrer qu'une fonction quelconque de deux angles, donnée arbitrairement entre les limites* 0 *et* 2π *de l'un des angles,* 0 *et* π, *de l'autre, et restant finie entre ces limites, peut être développée en série convergente de fonctions de Laplace.*

Épreuve pratique. — *A Nancy, dont la latitude est*

$$\varphi = 48^\circ 41' 31'',$$

on a observé à un certain instant l'azimut a et la distance zénithale z d'une étoile

$$a = 225^\circ 43' 10'', \qquad z = 25^\circ 44' 30'';$$

calculer l'heure sidérale de cet instant. On connaît l'ascension droite A *de l'étoile*

$$A = 9^{\circ}17'12'',25.$$

CERTIFICAT DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on considère la surface* (S) *définie par l'équation*

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-2az)-2a^2(x^2-y^2)=0.$$

A tout point M *de la surface* (S) *on fait correspondre un point* Q *du plan* xOy *obtenu de la façon suivante : on projette le point* M *sur le plan* xOy, *et, sur la droite joignant le point* O *à la projection* P *du point* M, *on prend un point* Q *tel que*

$$OP.OQ = k^2,$$

k désignant une longueur constante :

1° *Lorsque le point* M *de la surface* (S) *reste dans un plan* (Π), *le point correspondant* Q *décrit une conique* (C), *et, quand le plan* (Π) *se déplace, la conique* (C) *reste harmoniquement circonscrite à toutes les coniques* (Γ) *d'un faisceau tangentiel :*

2° *Quand le plan* (Π) *est tangent à la surface* (S), *la conique* (C) *se décompose en deux droites ; ces deux droites sont respectivement tangentes aux deux coniques* (Γ) *qui passent par leur point d'intersection :*

3° *Trouver la condition pour que le plan* (Π) *ayant pour équation*

$$z = mx + ny + p$$

soit tangent à la surface (S);

4° *Le point* M *décrivant une ligne asymptotique de la surface* (S), *le point* Q *décrit l'une des coniques* (Γ) *du faisceau tangentiel considéré.*

Épreuve pratique. — *On donne une parabole* (Π) *dans le plan horizontal de projection. Par une tangente variable à la parabole* (Π) *on mène un plan* (P) *faisant avec le plan horizontal un angle constant et donné* α, *puis on considère la surface* (S) *enveloppe du plan* (P).

1° *Démontrer que la droite* Δ, *suivant laquelle le plan* (P) *touche son enveloppe, est normale à la parabole* (Π) *et fait avec le plan horizontal un angle égal à* α;

2° *La droite* Δ *reste tangente à une courbe* H *du genre hélice : construire la projection horizontale du point où la droite* Δ *touche la courbe* (H);

3° *Déterminer la trace de la surface* (S) *sur le plan vertical mené par l'axe de la parabole* (Π) *et vérifier que cette trace est une parabole.*

Solution.

La surface considérée est une surface de Steiner, ayant comme point triple le point à l'infini sur l'axe des z et comme droites doubles cet axe des z et les droites joignant le point triple aux points cycliques du plan des xy. Toute section plane est une quartique à trois points doubles, unicursale; sa projection, faite du point triple sur le plan des xy, est une quartique bicirculaire ayant un point double à l'origine, et son inverse est une conique.

Les coordonnées ξ, η du point Q, inverse de P, peuvent servir de paramètres pour exprimer les coordonnées du point M de la surface; ces dernières ont pour valeur

$$x = \frac{k^2\xi}{\xi^2 - \eta^2}, \qquad y = \frac{k^2\eta}{\xi^2 - \eta^2}, \qquad z = \frac{\frac{k^4}{2a} + a(\xi^2 - \eta^2)}{\xi^2 - \eta^2}.$$

La section de la surface par le plan $z = mx + ny + p$ a

pour conique représentative

$$\frac{k^4}{2a} + a(\xi^2 - \eta^2) - mk^2\xi - nk^2\eta - p(\xi^2 + \eta^2) = 0;$$

elle est, lorsque le plan varie, harmoniquement circonscrite aux coniques du faisceau tangentiel Γ, représenté par l'équation

$$k^4(u^2 + v^2) - 4a^2w^2 - 2\mu uv = 0.$$

Pour qu'un plan Π soit tangent à la surface, il faut et il suffit qu'il la coupe suivant une quartique à quatre points doubles, décomposable en deux coniques, par conséquent que la conique C soit réductible, ce qui donne la condition

$$am^2(a + p) + an^2(a - p) - 2(a^2 - p^2) = 0.$$

Les tangentes communes aux coniques Γ sont les quatre droites doubles du système des coniques C; ce sont les images des quatre coniques situées sur la surface et dont les plans sont tangents respectivement en tous les points de chacune d'elles.

Une asymptotique de la surface S est tangente en chacun de ses points à l'une des deux coniques de section par le plan tangent en ce point; son image doit être tangente en chaque point à l'une des droites formant une conique C décomposable et ayant ce point pour centre; les coniques du faisceau Γ jouissent précisément de cette propriété. Les lignes asymptotiques de S sont dès lors des courbes unicursales, tangentes aux quatre coniques doubles.

CERTIFICAT D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVES ÉCRITES. — Première question. — *Étant donnée une forme binaire cubique f, sans facteur multiple, quels sont son invariant et ses deux covariants*

principaux? Comment réduit-on f à la forme canonique.

Deuxième question. — *On considère le faisceau tangentiel des coniques homofocales Σ représentées en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$(1+\mu)u^2+\mu v^2-w^2=0,$$

où μ est un paramètre variable :

1° *Déterminer toutes les coniques S qui sont harmoniquement circonscrites à la fois à toutes les coniques Σ; elles forment un système triplement infini de la forme*

$$\lambda_1 S_1+\lambda_2 S_2+\lambda_3 S_3+\lambda_4 S_4=0.$$

Déterminer les couples de points qui sont conjugués à la fois par rapport à toutes les coniques S et celles de ces coniques qui se réduisent à une droite double;

2° *Chaque point du plan est le centre d'une conique S réductible à deux droites; former l'équation de cette conique;*

3° *Par un point du plan passent une infinité de coniques S formant un réseau; déterminer la jacobienne et la courbe de Hermite de ce réseau.*

Épreuve pratique. — *On considère la cubique représentée par l'équation*

$$x^3+y^2-2=0$$

et le point de coordonnées $x=1$, $y=1$ situé sur cette courbe.

Former l'équation aux coefficients angulaires des tangentes à la courbe issues de ce point, autres que celle qui y a son point de contact. Appliquer la théorie des invariants à la réduction du premier membre de cette équation à la forme bicarrée et à la recherche

des racines. Quel est le rapport anharmonique des tangentes considérées?

SOLUTION (ALGÈBRE SUPÉRIEURE).

Les coniques harmoniquement circonscrites à toutes les coniques Σ ont pour équation

$$\lambda_1(x^2 - y^2 - z^2) - 2\lambda_2 yz + 2\lambda_3 zx - 2\lambda_4 xy = 0;$$

elles sont conjuguées par rapport aux trois couples d'ombilics du faisceau tangentiel, et les droites doubles du système sont les quatre tangentes communes aux quadriques Σ.

Par chaque point du plan passent deux droites constituant une conique S; ce sont les tangentes aux deux coniques Σ qui passent par ce point.

Si les coniques S passent par un point M, la courbe de Hermite du réseau se décompose dans ce point et dans la parabole bien connue enveloppe des polaires de ce point par rapport aux coniques Σ; la jacobienne est la strophoïde podaire de cette parabole par rapport au point M : c'est la focale à nœud.

En général, si l'on considère le système des coniques

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 = 0,$$

et si J_{123} est la jacobienne de S_1, S_2, S_3 l'équation

$$\begin{aligned} S_1(x, y, z) J_{234}(x', y', z') - S_2(x, y, z) J_{134}(x', y', z') \\ + S_3(x, y, z) J_{124}(x', y', z') - S_4(x, y, z) J_{123}(x', y', z') = 0 \end{aligned}$$

représente, lorsque x', y', z' sont les coordonnées d'un point fixe, la conique S réductible ayant son centre en ce point; si au contraire x, y, z sont les coordonnées d'un point fixe, et si x', y', z' sont variables, elle représente la jacobienne du réseau des coniques S passant par le point fixe.

Poitiers.

Certificat de Calcul différentiel et intégral.

Composition. — *Soient* M *un point quelconque d'une surface* S, N *le point où la normale* MN *rencontre le plan* xOy, *trouver les surfaces* S *telles que* MN = ON. — *Lignes de courbure de ces surfaces.* — *Lignes asymptotiques de la surface* S *qui contient la droite* $y = 0$, $x = 2a$.

Certificat de Mécanique.

Composition. — *Un tore ou anneau homogène, pesant, préalablement animé d'une très grande vitesse de rotation autour de son axe de figure est posé sur un plan horizontal, son axe faisant un angle* θ_0 *avec la verticale et son centre de gravité ayant une vitesse initiale nulle. On demande d'étudier son mouvement en négligeant tout frottement.* — *Lieu du point de contact sur le plan horizontal.* — *Données :* a, *distance du cercle méridien à l'axe ;* b, *le rayon de ce cercle.*

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4}, \qquad \theta'_0 = 0, \qquad \psi'_0 = 0.$$

Épreuve pratique. — *Un cône de révolution homogène dont la hauteur est de* 1^{m} *et dont le demi-angle au sommet est de* 30° *est suspendu par une de ses arêtes supposée horizontale. Trouver la longueur du pendule simple synchrone de ce pendule composé.*

Certificat d'Astronomie.

Composition. — *Exposer la méthode pour déterminer la longueur du méridien terrestre, en suppo-*

sant connues les colatitudes extrêmes d'un arc, la longueur de cet arc et une valeur approchée de l'aplatissement.

Montpellier.

Certificat de Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — *Une surface rapportée à trois axes rectangulaires est représentée par l'équation*

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^2 = 8a^2xy.$$

On demande : 1° de trouver les deux systèmes de lignes de courbure ; 2° pour un point arbitraire de la surface, calculer les coordonnées des centres et les rayons de courbure principaux qui correspondent à chacune des deux lignes de courbure passant par ce point ; 3° si le point donné décrit une ligne de courbure, démontrer que le centre de courbure correspondant est fixe ; 4° déterminer le lieu de tous ces centres de courbure principaux.

Solution.

La solution est immédiate si l'on remarque que la surface est l'enveloppe des deux systèmes de sphères

$$ax\lambda^2 + (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)\lambda + 2ay = 0,$$
$$x^2 + y^2 - z^2 + a^2 = 2a(x + y)\cos\varphi + 2az\sin\varphi.$$

Certificat d'Astronomie.

Épreuve écrite. — *Problème de Képler. — En partant des lois de Képler, trouver en fonction du temps l'anomalie excentrique, le rayon vecteur, l'anomalie vraie et la longitude d'une planète. Développements en série.*

On demande de calculer l'obliquité de l'écliptique et l'ascension droite du point vernal, comptée à partir du méridien M.

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un solide homogène est limité par la surface d'un paraboloïde de révolution et le plan d'un parallèle ; a étant le paramètre de la méridienne, la distance du parallèle au sommet est* $\frac{3}{4}a$.

1° *Déterminer la position du centre de gravité du solide.*

2° *Le solide étant en contact, par un point de la surface du paraboloïde, avec un plan horizontal fixe sur lequel on peut glisser sans frottement, on lui imprime la rotation* ω *autour de son axe et on l'abandonne à l'action des forces qui le sollicitent. Étudier son mouvement. Indiquer d'une manière générale les formes des courbes décrites par le point de contact sur le plan fixe et sur le paraboloïde. Considérer en particulier le cas où* $\omega = 0$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans le tétraèdre* OABC, *les arêtes* OA, OB, OC *ont respectivement pour longueurs* a, b, c, *et sont rectangulaires deux à deux. On suppose le tétraèdre rempli d'une matière homogène de densité égale à l'unité. Quelles relations doivent exister entre* a, b, c *pour que l'ellipsoïde d'inertie relatif à* O *soit de révolution? Ces relations étant satisfaites, déterminer l'axe et la méridienne de cet ellipsoïde.*

Toulouse.

Certificat d'Analyse.

I. *On considère la surface algébrique du quatrième ordre définie par les formules*

$$x = u^2,$$
$$y = uv,$$
$$z = v^2 + 2u$$

qui déterminent les coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z d'un de ses points en fonction de deux paramètres u et v.

1° *Démontrer que la section de cette surface par un quelconque de ses plans tangents se compose de deux coniques;*

2° *Déterminer ses lignes asymptotiques et démontrer que ce sont des courbes algébriques unicursales;*

3° *Calculer en chacun de ses points ses rayons de courbure principaux.*

II. *Calculer, en se servant du théorème de Cauchy, la valeur de chacune des intégrales définies*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 - x + x^2}\, dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1 + x + x^2}\, dx.$$

Certificat de Mécanique.

I. *Démontrer le théorème de Coriolis sur le mouvement relatif d'un point matériel.*

II. *On donne un fil homogène parfaitement flexible qui tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe Ox auquel il est attaché par ses extrémités en deux points fixes A et B. On négligera l'action de la pesanteur. On demande la figure*

d'équilibre de ce fil et la tension en chacun de ses points.

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On désigne par* R, R_1, R_2 *trois fonctions dépendant respectivement, la première de la seule variable* ρ, *la deuxième de la variable* ρ_1, *la troisième de la variable* ρ_2, *et par* R', R'_1, R'_2 *les dérivées de ces trois fonctions.*

1° *Démontrer que les trois familles de surfaces que l'on obtient en donnant successivement à* ρ, ρ_1, ρ_2 *des valeurs constantes dans les formules*

$$x = 2\rho\,\frac{R - \rho R' + R_1 - \rho_1 R'_1 + R_2 - \rho_2 R'_2}{\rho^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2} - R',$$

$$y = 2\rho_1\,\frac{R - \rho R' + R_1 - \rho_1 R'_1 + R_2 - \rho_2 R'_2}{\rho^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2} - R'_1,$$

$$z = 2\rho_2\,\frac{R - \rho R' + R_1 - \rho_1 R'_1 + R_2 - \rho_2 R'_2}{\rho^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2} + R'_2,$$

où x, y, z désignent les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point de l'espace, constituent un système triple orthogonal.

2° *Établir que ces trois familles sont formées de surfaces ayant toutes leurs lignes de courbure planes.*

II. *Trouver la fonction la plus générale de* $x + y$ *qui vérifie l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{2z}{(x - y)^2}.$$

III. *On considère l'équation aux dérivées partielles du premier ordre qui peut se mettre sous la forme irrationnelle suivante*

$$\sqrt{p} - \sqrt{q} = \sqrt{x} - \sqrt{y},$$

où p et q désignent les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial z}{\partial y}$, *par rapport*

aux variables indépendantes x et y, de la fonction inconnue z.

1° *Trouver l'intégrale générale de cette équation ;*

2° *Déterminer une surface intégrale passant par la parabole dont les équations sont*

$$x = 0, \quad y^2 = 2z.$$

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Étudier le mouvement d'un solide de révolution homogène suspendu par un point de son axe et soumis uniquement à des forces telles que la fonction potentielle correspondante est représentée par l'expression $H\cos^2\theta$: H désignant une constante, θ l'angle formé par l'axe du solide avec une droite de direction constante passant par le point fixe.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer le moment d'inertie d'une sphère homogène de rayon R, de densité ρ relativement à un axe tangent à sa surface.*

CERTIFICAT D'ASTRONOMIE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Exposer et justifier la méthode de Gauss pour la détermination de l'orbite elliptique d'une planète d'après trois observations équatoriales complète en s'en tenant à la première approximation.*

On désignera par r, r', r'' les rayons vecteurs menés du Soleil à la planète aux moments des trois observations ; par θ, θ', θ'' les produits de la constante de Gauss par les intervalles de temps écoulés respectivement entre la seconde et la troisième, entre la première et la troisième, entre la première et la seconde ; par $[rr']$ le double de l'aire du triangle compris entre r, r' et la droite qui joint leurs extrémités ; par $[r'r'']$ et par $[rr'']$ des quantités analogues. On regardera comme

établies les formules

$$\frac{[r'r'']}{[rr'']} = \frac{\theta}{\theta'}\left[1-\frac{\theta'^2-\theta^2}{6r'^3}-\frac{\theta''(\theta'\theta''-\theta^2)}{4r'^4}\frac{dr'}{d\theta}\cdots\right],$$

$$\frac{[rr']}{[rr'']} = \frac{\theta''}{\theta'}\left[1-\frac{\theta''^2-\theta'^2}{6r'^3}-\frac{\theta(\theta\theta'-\theta''^2)}{4r'^4}\frac{dr'}{d\theta'}\cdots\right].$$

CERTIFICAT DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Soient f_1, f_2, f_3, f_4 des formes quadratiques de trois paramètres ξ_1, ξ_2, ξ_3 dont les coefficients sont donnés, on considère la surface S définie par les formules*

$$\rho x_1 = f_1, \quad \rho x_2 = f_2, \quad \rho x_3 = f_3, \quad \rho x_4 = f_4,$$

où x_1, x_2, x_3, x_4 sont les coordonnées homogènes d'un point de l'espace.

1° *Déterminer la ligne double de cette surface.*

2° *Donner une classification des surfaces telles que S selon la nature de cette ligne double.*

3° *Démontrer que la surface S est, en général, le lieu d'un point dont les racines carrées des distances à quatre plans fixes sont liées par une relation linéaire et homogène.*

4° *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface S.*

5° *Trouver le lieu des centres des coniques tracées sur cette surface.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne un cône C dont le sommet est dans le plan vertical de projection et dont la base, située dans le plan horizontal, est une ellipse E ayant son grand axe parallèle à la ligne de terre. Construire les projections de la courbe double de la surface réglée engendrée par les normales au cône C en tous les points de l'ellipse E.*

ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES. CONCOURS DE 1897 (DEUXIÈME SESSION) [1].

Géométrie analytique.

On donne deux axes quelconques Ox et Oy, un point $A(x = a)$ sur l'axe des x, un point $B(y = b)$ sur l'axe des y et une droite (D), $y - mx = 0$:

1° Former l'équation générale des coniques circonscrites au triangle AOB et telles que le pôle de la droite AB soit sur (D);

2° Démontrer que toutes les coniques ont une tangente commune, qui, avec l'axe des x, l'axe des y et la droite (D), détermine sur AB une division harmonique; et que la droite (D) a un pôle fixe par rapport à toutes les coniques;

3° Démontrer que le lieu des centres de ces coniques est tangent à la droite (D) et que, si l'on fait varier m, il passe par quatre points fixes;

4° Démontrer que la polaire d'un point (α, β) donné, prise par rapport aux coniques du faisceau, passe par un point fixe. Construire ce point et voir comment il se déplace si l'on fait varier m;

5° Démontrer que le faisceau de coniques correspondant à une valeur donnée de m admet deux paraboles réelles ou imaginaires et chercher le lieu des points de rencontre des tangentes à ces paraboles aux points A et B quand m varie.

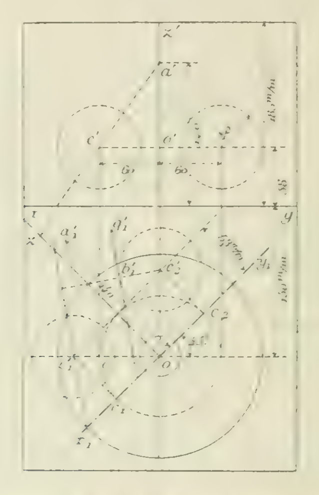
Épure.

Intersection d'un tore et d'un cylindre de révolution. — Le tore a son axe zz' vertical et placé au milieu de la feuille de l'épure. Le rayon du cercle générateur (c, c') est de 40^{mm}. Le centre de ce cercle décrit une circonférence de centre oo' et de rayon $o'c' = 60^{mm}$. Le point (oo') est à 58^{mm} au-dessus du

[1] Par suite d'une erreur, la question de Géométrie analytique et l'épure données à la première session n'ont pas été insérées; elles paraîtront dans un de nos prochains numéros.

plan horizontal et à 150^{mm} en avant du plan vertical xy de projection.

Le cylindre de révolution est défini de la manière suivante : Son axe est contenu dans le plan méridien x_1y_1 du tore qui fait 45° avec le plan de front. Cet axe rencontre en a l'axe vertical z du tore (cote du point a, 140^{mm}) et il passe par le point $(c_1c'_1)$, centre du cercle générateur du tore. La généra-



trice est la tangente $g'_1 h'_1$ à la deuxième position c_2c_2 du cercle générateur dans le plan méridien x_1y_1.

On demande de déterminer l'intersection des deux surfaces en ayant soin d'indiquer la construction de la tangente en un point de la courbe. Il sera tenu compte de la recherche des points et tangentes remarquables.

On figurera le tore en supprimant de ce corps la portion contenue dans le cylindre.

Nota. — Les projections auxiliaires seront tracées à l'encre bleue.

Cadre de 0^m,27 sur 0^m,45. Ligne de terre parallèle aux petits côtés du cadre et à 0^m,180 du côté supérieur.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.
Titre intérieur : Tore et cylindre.

AVIS.

Conservatoire national des Arts et Métiers.

Nous recevons l'affiche des Cours pour l'année 1897-1898. L'avis que nous avons publié dans le présent Volume (p. 46) s'applique sans aucune modification.

BIBLIOGRAPHIE.

Ch. MÉRAY, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. — Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques. 3e Partie : Questions analytiques classiques. Un vol. grand in-8 de vi-206 pages. Prix 6fr. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1897.

Dans ce nouveau Volume, l'auteur applique aux questions usuelles les principes et les méthodes qui font l'objet des deux précédents. Grâce à la netteté et à la précision de tous ces aperçus, on aborde sans peine l'étude des questions les plus ardues et, quand l'artifice intervient, il devient logique, tant il est bien amené par la succession des idées.

Ce qui prouve, du reste, l'importance de l'œuvre de M. Méray, c'est qu'elle a des partisans et des adversaires passionnés. A une époque où l'Analyse a pris un développement si extraordinaire, il n'y a pourtant pas à s'étonner autant de voir des esprits élevés s'inquiéter enfin de la solidité de la base sur laquelle repose un édifice comprenant tant de pièces si laborieusement assemblées.

En regardant de près certaines démonstrations longtemps admises sans conteste, en discutant les principes décorés du nom de *notions primordiales*, on est forcé de reconnaître que ceux-ci sont contestables et celles-là peu claires, peu convain-

cantes, quelquefois même erronées. De là des obscurités et des doutes, bien faits pour fatiguer et inquiéter au début ceux qui abordent l'étude des hautes Mathématiques.

En adoptant, au contraire, le point de départ de M. Méray, on comprend immédiatement ce que c'est qu'une fonction; chaque nouveau fait apporte ensuite avec lui sa raison d'être en même temps qu'une démonstration simple, gardant toute la rigueur réalisable dans les éléments.

Les adversaires de cette méthode lui font le reproche de tout ramener à un type unique, par le moyen du développement en séries entières; il n'est certes pas difficile d'imaginer des fonctions pour l'étude desquelles ce procédé serait pénible ou même impraticable; mais, sans compter que ces fonctions n'ont existé jusqu'à présent, et n'existeront probablement jamais, qu'à l'état de pures et bien arides spéculations, une objection, même moins fantaisiste, ne saurait diminuer la valeur d'un concept embrassant les faits les plus variés, avec une facilité et une sûreté inconnues jusqu'ici. Pour lui donner créance, que ses auteurs commencent par fournir un point de départ aussi bien défini!

La rectitude invariable de la voie suivie n'empêche pas, d'ailleurs, qu'elle jette des embranchements au fur et à mesure des besoins de la Science. Bien loin d'affaiblir l'esprit de recherche, de restreindre son initiative, d'émousser ce qu'il doit avoir d'incisif, cet enseignement à la fois clair et précis, dans lequel toutes les démonstrations atteignent sans effort la rigueur absolue, ajoute, à la satisfaction de l'intelligence, la sûreté nécessaire pour faire de nouveaux pas en avant.

Aussi, après d'autres et en pleine conviction, émettrai-je le vœu que la méthode de M. Méray ne tarde pas à pénétrer dans l'enseignement.

Bien que ce troisième Volume ne renferme que des applications, son intérêt n'est pas diminué pour cela.

L'espace me manque pour détailler toutes les jolies questions que le lecteur y trouvera. Je signalerai seulement une nouvelle méthode d'intégration, appliquée sur $\int \frac{dx}{\cos x - H}$, H étant une constante réelle quelconque; une démonstration inattendue des formules de Cauchy pour l'intégration des équations linéaires à coefficients constants. A remarquer aussi, au

point de vue doctrinal, la rigueur absolue rendue à la théorie des intégrales multiples par la prise en considération de l'olotropie de la fonction placée sous le signe $\int$; quelques points du calcul des variations traités d'une matière précise et claire; l'exposé d'une proposition à substituer au lemme de Cauchy dans la théorie générale des fonctions, observation qui affermit encore la base choisie par M. Méray, en justifiant l'introduction généralisée des séries entières dans l'Analyse.

L'addition V « Sur un cas étendu dans lequel l'interpolation permet de représenter une fonction avec une approximation indéfinie » montre, une fois de plus, combien est insuffisante la considération exclusive de la continuité des fonctions.

Dans son ensemble, l'œuvre a une portée bien plus grande que les questions de détail rassemblées dans le Volume dont j'avais à parler, et je ne pouvais me dispenser de l'apprécier à cette occasion. En cela, je me suis placé surtout au point de vue doctrinal, et j'ai souvent prononcé le mot *enseignement;* c'est que, en effet, j'ai pu constater, en utilisant les méthodes de M. Méray, avec quelle facilité de jeunes esprits s'ouvraient ainsi à l'étude des Mathématiques, réputée pourtant si ardue.

Il est bien remarquable que, malgré le caractère élevé des questions auxquelles ces méthodes s'appliquent, il n'est besoin, pour se les approprier, que d'une connaissance un peu approfondie de l'Algèbre élémentaire. F. PERNOT.

QUESTIONS.

1784. Si, à deux tétraèdres, dont les sommets sont les huit points communs à trois quadriques, on circonscrit deux quadriques bitangentes, dont une des coniques communes est dans un plan fixe, le plan de l'autre passe par un point fixe.

(E. DUPORCQ.)

1785. Étant donné un arc de courbe plane, on considère la perpendiculaire abaissée du barycentre du périmètre de cet arc sur la corde qui en joint les extrémités : enveloppe des droites qui correspondent ainsi à des arcs de courbe parallèles à un arc de courbe donné. (E. DUPORCQ.)

LISTE DES QUESTIONS DES « NOUVELLES ANNALES »

RESTÉES SANS SOLUTION AU 31 DÉCEMBRE 1897 [1].

62	554	772	893	1078	1390	1491	1582	1664	1738
126	573	774	909	1092	1392	1502	1585	1672	1742
187	583	798	918	1105	1393	1503	1588	1676	1743
193	585	804	919	1107	1394	1505	1596	1677	1747
261	589	805	920	1108	1402	1508	1599	1678	1751
266	592	812	921	1149	1403	1510	1609	1680	1752
324	593	815	929	1206	1416	1511	1609	1685	1754
333	596	820	937	1234	1435	1513	1614	1686	1755
360	597	821	938	1236	1438	1519	1616	1687	1756
383	598	829	947	1246	1439	1522	1617	1688	1761
400	604	831	952	1256	1440	1523	1628	1689	1762
414	606	846	967	1298	1441	1527	1629	1690	1763
424	607	848	989	1305	1442	1528	1630	1691	1765
434	617	851	999	1307	1443	1530	1631	1692	1770
439	625	852	1000	1310	1444	1531	1632	1693	1773
448	643	859	1004	1321	1445	1532	1633	1694	1775
480	666	861	1007	1355	1446	1548	1634	1695	1776
495	693	868	1008	1359	1447	1549	1647	1697	1777
496	703	880	1013	1361	1448	1551	1652	1704	1779
512	718	882	1015	1363	1471	1552	1653	1705	1780
513	724	884	1035	1364	1479	1554	1656	1710	1781
516	729	885	1042	1365	1483	1571	1657	1721	1782
525	730	888	1058	1366	1485	1576	1660	1730	1783
528	731	891	1063	1371	1486	1579	1661	1731	1784
546	732	892	1074	1376	1490	1580	1662	1733	1785
549									

ERRATA.

1896, page 410, ligne 17, *au lieu de* α_h et β_h, *lisez* α_k et β_k.
1897, page 524, dernière ligne (Note), *au lieu de* 251, *lisez* 521.
1897, page 531, ligne 3, *au lieu de* Mathematischen, *lisez* Mathematische.

[1] Les lecteurs sont invités à signaler les erreurs qui auraient pu se glisser dans ce relevé, malgré l'attention avec laquelle on l'a établi. La Rédaction les remercie à l'avance des Communications qu'ils voudront bien lui faire à ce sujet.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME XVI, 3e SÉRIE).

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

A. — Algèbre élémentaire ; théorie des équations algébriques et transcendantes ; groupes de Galois ; fractions rationnelles ; interpolation.

B. — Déterminants ; substitutions linéaires ; élimination ; théorie algébrique des formes ; invariants et covariants ; quaternions ; équipollences et quantités complexes.

C. Principes du Calcul différentiel et intégral ; applications analytiques ; quadratures ; intégrales multiples ; déterminants fonctionnels ; formes différentielles ; opérateurs différentiels.

D. — Théorie générale des fonctions et son application aux fonctions algébriques et circulaires ; séries et développements infinis, comprenant en particulier les produits infinis et les fractions continues considérées au point de vue algébrique ; nombres de Bernoulli ; fonctions sphériques et analogues.

E. — Intégrales définies. et en particulier intégrales eulériennes.

F. — Fonctions elliptiques avec leurs applications.

G. — Fonctions hyperelliptiques, abéliennes, fuchsiennes.

H. — Équations différentielles et aux différences partielles; équations fonctionnelles; équations aux différences finies; suites récurrentes.

I. — Arithmétique et théorie des nombres; analyse indéterminée; théorie arithmétique des formes et des fractions continues; division du cercle; nombres complexes, idéaux, transcendants.

J. — Analyse combinatoire; Calcul des probabilités; Calcul des variations; Théorie générale des groupes de transformations [en laissant de côté les groupes de Galois (A), les groupes de substitutions linéaires (B) et les groupes de transformations géométriques (P)]; théorie des ensembles de M. Cantor.

O. — Géométrie infinitésimale et Géométrie cinématique; applications géométriques du Calcul différentiel et du Calcul intégral à la théorie des courbes et des surfaces; quadrature et rectification; courbure; lignes asymptotiques, géodésiques; lignes de courbure; aires; volumes; surfaces minima; systèmes orthogonaux.

P. — Transformations géométriques; homographie; homologie et affinité; corrélation et polaires réciproques; inversion; transformations birationnelles et autres.

Q. — Géométrie. Divers; Géométrie à *n* dimensions; Géométrie non euclidienne. Analysis situs; Géométrie de situation.

R. — Mécanique générale; Cinématique; Statique comprenant les centres de gravité et les moments d'inertie; Dynamique; Mécanique des solides; frottement; attraction des ellipsoïdes.

Licence ès Sciences mathématiques, et certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

Questions de concours.

Correspondance.

Bibliographie.

Variétés.

Divers.

Questions proposées.

Solutions de questions proposées.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES NOMS CITÉS
(TOME XVI, 3e SÉRIE).

Les noms des AUTEURS sont en PETITES CAPITALES.
Les noms *cités* sont en *italiques*.

(1) Admis le 9e à l'École Polytechnique en 1879; décédé avant son entrée à l'École.

23955 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

